

**DETECCIÓN Y ANÁLISIS ARMÓNICO EN SEÑALES ELÉCTRICAS  
USANDO SENSADO COMPRIMIDO PARA EVALUACIÓN DE LA  
CALIDAD DE ENERGÍA.**



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA  
SEDE QUITO**

**CARRERA:  
INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**Trabajo de titulación previo a la obtención del título de  
INGENIERO ELÉCTRICO**

**TEMA:  
DETECCIÓN Y ANÁLISIS ARMÓNICO EN SEÑALES ELÉCTRICAS  
USANDO SENSADO COMPRIMIDO PARA EVALUACIÓN DE LA  
CALIDAD DE ENERGÍA.**

**AUTOR:  
MARICELA ALEXANDRA ARCINIEGA CALDERON**

**DIRECTOR:  
ESTEBAN MAURICIO INGA ORTEGA**

**Quito, Enero 2018**

Maricela Alexandra Arciniega Calderon

**DETECCIÓN Y ANÁLISIS ARMÓNICO EN SEÑALES ELÉCTRICAS USANDO  
SENSADO COMPRIMIDO PARA EVALUACIÓN DE LA CALIDAD DE ENERGÍA**

Universidad Politécnica Salesiana  
Ingeniería Eléctrica

**Breve reseña historia e información de contacto:**



**Maricela Alexandra Arciniega Calderon** (Y'1993-M'10). Realizó sus estudios secundarios en el Colegio Nacional Mixto Eloy Alfaro, se graduó de Físico Matemático. Egresado de la Carrera de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Politécnica Salesiana. Su trabajo se basa en detección y análisis armónico en señales eléctricas usando sensado comprimido.  
[marciniega@est.ups.edu.ec](mailto:marciniega@est.ups.edu.ec)

**Dirigido por:**



**Esteban Mauricio Inga Ortega** (Y'1976-M'08). Esteban Inga es investigador científico en la Universidad Politécnica Salesiana – Sede Quito, desde el año 2011. En el año 2001 se gradúa de Ingeniero Electrónico en la Universidad Politécnica Salesiana – Sede Cuenca. En el año 2008 recibió su Maestría en Educación y Desarrollo Social por la Universidad Tecnológica Equinoccial, a inicio del año 2017 recibe su grado de Magíster en Ingeniería por la Universidad Pontificia Bolivariana de Medellín – Colombia y en el mes de Noviembre de 2017 obtiene su grado de Ph.D de la Universidad Pontificia Bolivariana de Medellín – Colombia con mención de honor Magna Cum Laude otorgado cuando la tesis supera las expectativas de lo planteado en el proyecto, por concepto unánime de los jurados, y se demuestra producción

científica.

Es coordinador del grupo de investigaciones en redes eléctricas inteligentes de la Universidad Politécnica Salesiana, donde ha trabajado en investigaciones relacionadas a teoría de grados y el despliegue de redes de comunicaciones y redes de distribución eléctrica bajo consideraciones de optimalidad. Ha trabajado en métodos para reconstrucción de la curva de carga residencial usando sensado comprimido.

Miembro activo de IEEE e investigador acreditado en el Senescyt. Anualmente desarrolla seminarios de escritura científica y técnicas de investigación orientada a incrementar la visibilidad e impacto de la producción científica de investigadores de varias Universidades Nacionales e Internacionales.

[einga@ups.edu.ec](mailto:einga@ups.edu.ec)

**Todos los derechos reservados:**

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la ley, cualquier forma de reproducción, difusión de este texto con fines académicos o investigativos por cualquier medio, con la debida notificación a los autores.

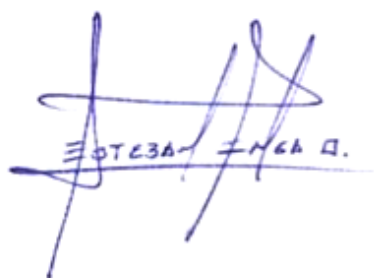
**DERECHOS RESERVADOS**

©2018 Universidad Politécnica Salesiana  
QUITO-ECUADOR

### **DECLARATORIA DE COAUTORÍA DEL DOCENTE TUTOR/A**

Yo, Esteban Mauricio Inga Ortega declaro que bajo mi dirección y asesoría fue desarrollado el trabajo de titulación “*Detección y Análisis Armónico en Señales Eléctricas usando Sensado Comprimido para Evaluación de la Calidad de Energía*”, realizado por Maricela Alexandra Arciniega Calderón, obteniendo un producto que cumple con todos los requisitos estipulados por la Universidad Politécnica Salesiana para ser considerados como trabajo final de titulación.

Quito, enero, 2018



Esteban Mauricio Inga Ortega

Cédula de identidad: 0102116043

## CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR

Yo, Maricela Alexandra Arciniega Calderón, con documento de identificación N° 1722372180, manifiesto mi voluntad y cedo a la Universidad Politécnica Salesiana la titularidad sobre los derechos patrimoniales en virtud de que soy autor del trabajo de grado intitulado: “*Detección y Análisis Armónico en Señales Eléctricas usando Sensado Comprimido para Evaluación de la Calidad de Energía.*”, mismo que ha sido desarrollado para optar por el título de: Ingeniero Eléctrico, en la Universidad Politécnica Salesiana, quedando la Universidad facultada para ejercer plenamente los derechos cedidos anteriormente.

En aplicación a lo determinado en la Ley de Propiedad Intelectual, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada. En concordancia, suscribo este documento en el momento que hago entrega del trabajo final en formato impreso y digital a la Biblioteca de la Universidad Politécnica Salesiana.

Quito, enero, 2018



Maricela Alexandra Arciniega Calderón

Cédula: 1722372180

## ÍNDICE GENERAL

Resumen.....	6
Abstract.....	6
1. Introducción.....	7
2. Señales armónicas y su efecto en la calidad de energía.....	11
2.1 Diccionario.....	12
2.2 Representación dispersa con la minimización de la norma $\ell_0$ y $\ell_1$ .....	13
2.3 Sensado comprimido.....	14
2.4 Algoritmos de reconstrucción de señales.....	15
3. Formulación del problema.....	17
4. Análisis de resultados .....	21
5. Conclusiones.....	28
6. Referencias.....	29

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Representación matricial del sensado comprimido.....	9
Figura 2. Señal armónica con grado THD igual a 5.....	22
Figura 3. Reconstrucción de la primera señal utilizando un diccionario unificado en los tres algoritmos, tomando de la señal original el 30% ,50% y 90% de datos respectivamente.....	22
Figura 4. Reconstrucción en vista 3D y coeficientes de la representación dispersa de la primera señal utilizando un diccionario unificado en los tres algoritmos, tomando de la señal original el 30% ,50% y 90% de datos respectivamente.....	23
Figura 5. Error de reconstrucción de la primera señal, con intervalo en pasos de 5 del 20% a 100% de la toma de datos. a) Error utilizando la norma $\ell_1$ . b) Error utilizando la norma $\ell_2$ .....	23
Figura 6. Señal armónica correspondiente a la medición de THD de la onda de voltaje de un transformador.....	24
Figura 7. Reconstrucción de la segunda señal utilizando un diccionario unificado en los tres algoritmos, tomando de la señal original el 30% ,50% y 90% de datos respectivamente.....	24
Figura 8. Reconstrucción en vista 3D y coeficientes de la representación dispersa de la segunda señal utilizando un diccionario unificado en los tres algoritmos, tomando	

de la señal original el 30% ,50% y 90% de datos.....	25
Figura 9. Error de reconstrucción de la segunda señal, con intervalo en pasos de 5 del 20% a 100% de la toma de datos. a) Error utilizando la norma $\ell_1$ . b) Error utilizando la norma $\ell_2$ .....	25
Figura 10. Señal armónica correspondiente a la medición de THD de la onda de corriente de un transformador.....	26
Figura 11. Reconstrucción de la tercera señal utilizando un diccionario unificado en los tres algoritmos, tomando de la señal original el 30% ,50% y 90% de datos respectivamente.....	26
Figura 12. Reconstrucción en vista 3D y coeficientes de la representación dispersa de la tercera señal utilizando un diccionario unificado en los tres algoritmos, tomando de la señal original el 30% ,50% y 90% de datos.....	27
Figura 13. Error de reconstrucción de la tercera señal, con intervalo en pasos de 5 del 20% a 100% de la toma de datos. a) Error utilizando la norma $\ell_1$ . b) Error utilizando la norma $\ell_2$ .....	27

### ***ÍNDICE DE TABLAS***

Tabla 1. Datos de las características del transformador.....	19
Tabla 2. Datos del equipo y tiempo de medición.....	19
Tabla 3. Resumen de los errores obtenidos en la reconstrucción de las tres señales mediante LQ, BP, OMP.....	28



# DETECCIÓN Y ANÁLISIS ARMÓNICO EN SEÑALES ELÉCTRICAS USANDO SENSADO COMPRIMIDO PARA EVALUACIÓN DE LA CALIDAD DE ENERGÍA.

## Resumen

La medición y el análisis de armónicos son partes clave de la evaluación de la calidad de la energía; sin embargo, el medir armónicos bajo la arquitectura de medición distribuida a gran escala se enfrenta al problema de obtener mediciones fuera de secuencia que trae latencia en la comunicación y la fusión de datos. Por esta razón, en este artículo se propone como solución a los problemas de medición y mejora de la resolución de las señales armónicas el sensado comprimido (SC) como técnica para la recuperación y estimación de señales, técnica que permite disminuir la longitud de muestreo armónico y complejidad del procedimiento de datos en comparación con otras teorías. Para esto, se utilizan algoritmos de restauración como el least squares (LQ), Basic Pursuit (BP), Ortogonal Matching Pursuit (OMP), realizándose experimentos en tres señales con diferente grado de distorsión armónica total (THD), obteniendo como resultados el error de reconstrucción en cada algoritmo para encontrar el porcentaje mínimo de compresión en la recuperación de señales armónicas. Finalmente, los resultados del experimento muestran la precisión de detección y que la respuesta del sistema se puede mejorar sin la necesidad de aumentar los puntos de muestreo, mostrando la variación del error en función del porcentaje de compresión.

**Palabras Clave:** Algoritmos de Reconstrucción, Diccionario, Distorsión Armónica total, Medición, Sensado Comprimido, Señales Dispersas.

## Abstract

The measurement and analysis of harmonics are key parts of the evaluation of the quality of the energy; however, measuring the harmonics under the large-scale distributed measurement architecture faces the problem of obtaining measurements outside the sequence that brings latency into communication and data fusion. For this reason, this article proposes as a solution to the problems of measurement and improvement of the resolution of harmonic signals, the compressed sensing (SC) as a technique for the recovery and estimation of signals, a technique that reduces the length of harmonic sampling and complexity of the data procedure compared to other theories. For this, we use restoration algorithms such as least squares (LQ), Basic Pursuit (BP), Orthogonal Matching Pursuit (OMP), performing experiments on three signals with different degree of total harmonic distortion (THD), obtaining as results the error of reconstruction in each algorithm to find the minimum percentage of compression in the recovery of harmonic signals. Finally, the results of the experiment show the accuracy of the detection and the system response can be improved without the need to increase the sampling points, showing the variation of the error as a function of the percentage of compression.

**Keywords:** Reconstruction Algorithms, Dictionary, Total Harmonic Distortion, Measurement, Compressed Sensing, Dispersal Signals.

## 1. Introducción

La medición y el análisis de armónicos son partes clave de la evaluación de la calidad de la energía [1], [2]. Las razones para que se produzcan armónicos son varias, entre las más frecuentes están las originadas por los equipos electrónicos que consumen energía eléctrica de una forma no lineal, es decir, de una forma no continua en el tiempo; también está la variación de los parámetros de un circuito e impedancias, y la conexión y desconexión de equipos [1]. Los armónicos en la demanda introducen fluctuaciones, caídas de tensión, desequilibrios en la red conduciendo a posibles daños y fallos de energía [3]–[5]. Por esto, actualmente el análisis de armónicos es de gran importancia, siendo que, las componentes de frecuencia de una interferencia están dadas por componentes fundamentales y sus componentes armónicas.

El análisis armónico rápido y en línea es una función importante en las redes residenciales inteligentes y enfrenta nuevos retos en las arquitecturas de medición distribuida [1], [6]; siendo esta, una forma de medición que recoge la información de los concentradores que están en su territorio para procesarlos y almacenarlos, de tal forma que el centro de operaciones requiere sólo una fracción de información recopilada [7]. Esta forma de selección de datos ahorra una cantidad significativa de espacio en el ancho de banda, eliminando la posibilidad de atascamiento de información en el centro de operaciones [7]. No obstante, la medición de armónicos bajo la arquitectura de medición distribuida a gran escala se enfrenta al problema de medición fuera de secuencia que trae latencia en la comunicación y la fusión de datos [1], [8], [9]. Las redes eléctricas para la detección distribuida a gran escala transportan datos eléctricos de una manera dinámica y de múltiples

saltos, el tiempo de latencia de los datos de medición es complejo y en ciertas ocasiones la información puede estar incompleta por lo que para realizar su análisis se requieren datos armónicos en la misma sección temporal; los datos incompletos o fuera de secuencia reducirán la precisión de la supervisión armónica y la evaluación de la calidad de la energía [10]–[13].

Dentro de la tendencia de la red inteligente, la medición distribuida ha ganado popularidad entre la red de energía residencial a gran escala. Supervisar y evaluar la calidad de la energía en el tiempo es el método para garantizar energía segura y confiable para el lado de la demanda, y la medición y el análisis de armónicos son necesarios como se explica en [1]. En [2], se explica el proceso de descomposición para la extracción de componentes de armónicos a partir de datos de calidad de potencia comprimidos bajo el marco de la teoría de muestra de Shannon. En [3] de acuerdo con la demanda de detección armónica, se propone un nuevo método que utiliza la teoría de la sensado comprimido (SC) para obtener una mayor precisión de detección armónica sólo aumentando la frecuencia de muestreo.

Por otro lado, varias han sido las técnicas propuestas para el análisis de armónicos como, arquitecturas de filtros ya sean adaptativas, o no, a través de la transformada rápida de Fourier (FFT) como se exponen en [9], [14]. Otra técnica propuesta en [15] es la de un método capaz de estimar y extraer armónicos de una manera adaptativa usando una referencia armónica definida comprobando los resultados mediante FFT. En el caso del sensado comprimido relacionado a los armónicos [16] da un enfoque distinto al de este trabajo, pues, expone la

utilización de SC aplicado a las mediciones de sincrofasores utilizando un modelo de multifrecuencia SC Taylor-Fourier (TF) (CSTFM) con el objetivo de explotar en un método conjunto, las propiedades de SC y de la transformada TF para identificar los componentes más relevantes de la señal, incluso en condiciones dinámicas [17].

El objetivo de cada uno de los diferentes métodos de análisis de armónicos indistintamente de la aplicación que se le da al proceso, es el de analizar las componentes de una señal, aquí radica la importancia de que esta esté completa; puesto que si la señal para análisis estuviese fragmentada el análisis armónico sería insuficiente; es por esto que de acuerdo a lo expuesto brevemente, donde se explica la importancia de la medición para el análisis armónico y que esta se puede hacer a través de medición distribuida que requiere sólo una fracción de información recopilada, en el presente artículo se aplica la teoría del sensado comprimido (SC) para la reconstrucción de señales armónicas disminuyendo la longitud de muestreo armónico y complejidad del procesamiento de datos en comparación con otras teorías.

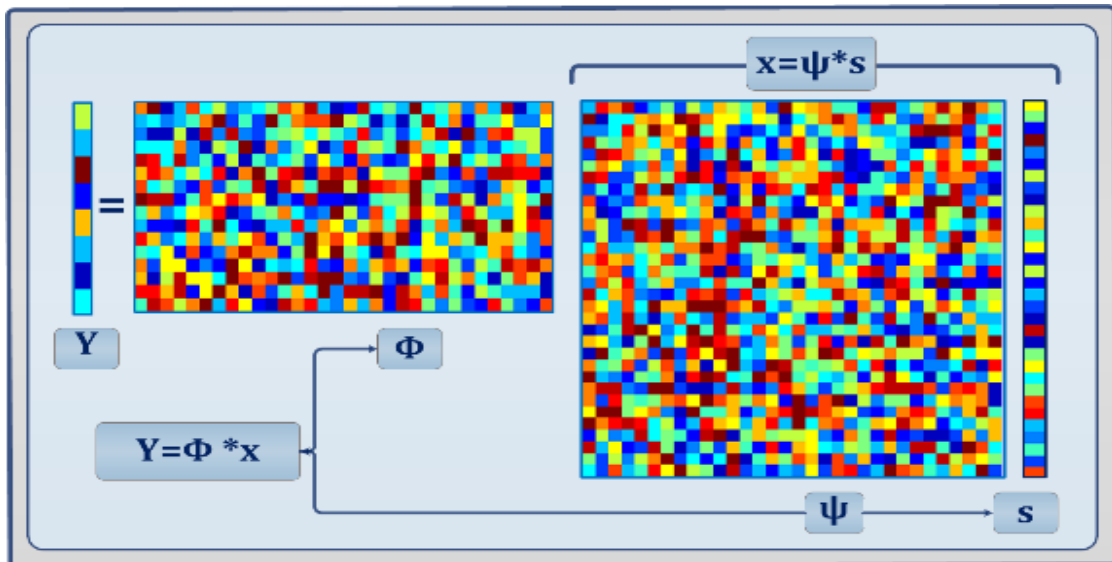
Con el avance de las técnicas para procesamiento digital de señales, en la actualidad es posible procesar de manera eficiente los datos. En el análisis de armónicos, las técnicas de procesamiento digital permiten eliminar las componentes del espectro, tanto en su frecuencia fundamental como en sus armónicas [16], [18]–[21]. Muchas señales tienen representaciones dispersas en cierto espacio. Una señal perteneciente a un espacio vectorial tiene una representación dispersa si esta puede ser expresada como una combinación lineal de pocos vectores de una base de dicho espacio. Por ejemplo,

las señales formadas por componentes armónicas son dispersas en series de Fourier y otras se pueden representar mediante transformadas wavelets con estructuras dispersas [12], [20], [22], [23].

Dentro del procesamiento de señales están las técnicas de restauración que intentan mejorar la calidad de la señal a partir de una versión degradada o contaminada de la misma [24]–[25]. Un inconveniente con la reconstrucción de señales radica en que para no perder la información en el proceso de restauración de la señal a partir de las muestras, la señal está limitada en banda y tasa de muestreo superior al doble de su ancho de banda (teorema de Shannon/Nyquist), muchas veces esta llega a ser tan alta que se obtienen demasiadas muestras y es necesario comprimir la señal [23].

Una solución al teorema de Nyquist es el sensado comprimido (SC) el cual indica que, si hay una señal dispersa, la señal original puede ser reconstruida a partir de un muestreo utilizando una pequeña porción de los coeficientes de la transformada de Fourier. La Teoría del SC ha sido desarrollada recientemente como una técnica en el campo de muestreo/reconstrucción de señales, esta utiliza algoritmos que permiten reconstruir una señal dispersa a partir de un conjunto de medidas aleatorias (proyecciones aleatorias), es decir, permite representar señales mediante un número reducido de datos siendo capaz de reconstruir la señal con escasa pérdida de información. No obstante, se debe tener en cuenta que siempre es necesario conocer algo de información de la señal para poder realizar su representación dispersa [2], [10], [26]–[30].

A diferencia del muestreo Shannon/Nyquist que describe



**Figura 1.** Representación matricial del sensado comprimido.

completamente una señal explotando su limitación del ancho banda como se puede ver en [23], la idea principal de la detección comprimida es la de recuperar lo más exacto posible una señal dispersa, utilizando sólo unas pocas mediciones lineales mediante optimización convexa [21], [22].

La eficacia del Sensado Comprimido (SC) depende del diccionario a utilizar mas no depende del ancho de banda (cantidad total de datos dividida por el tiempo de lectura del sistema) de la señal bajo análisis, sino de la cantidad de información de la misma. En ese sentido el SC permite representar señales mediante un número reducido de medidas, y a su vez, ofrece herramientas capaces de reconstruir las señales originales con muy poca pérdida de información en relación a la señal original. De esta manera el SC simplifica el proceso de adquisición de datos y dado que muchas señales del mundo real pueden aproximarse adecuadamente a partir de señales dispersas, SC contribuye significativamente al mejoramiento en cuanto a la forma en la que actualmente se realiza el procesamiento de señales, reduciendo así el costo computacional [22], [31], [32].

Ya sea en el análisis de señales armónicas, en el procesamiento de cualquier señal o imagen se han estudiado un amplio conjunto de procedimientos, tanto lineales como no lineales para realizar restauraciones sobre señales perturbadas basados en la teoría de Sensado Comprimido (SC) [33].

El proceso de compresión del SC utiliza tres pasos: adquisición de datos, codificación y muestreo; con el objetivo de obtener directamente los datos muestreados durante una medición para reducir los requerimientos en la adquisición de datos y la carga computacional para codificar la señal [19], [34].

Entre las principales características del SC tenemos:

- Intenta unificar el proceso de muestreo y de compresión en una única tarea.
- Recupera una señal a partir de un conjunto de proyecciones aleatorias con alta probabilidad.
- Usa algoritmos de reconstrucción no lineal.

Otro aspecto importante a tomar en cuenta es que para obtener una representación comprimida de la señal se calculan los coeficientes en una base seleccionada sean estas representaciones vectoriales bajo la

transformada de Fourier o transformada Wavelet.

En la figura 1 se ilustra la representación esquemática de la teoría del sensado comprimido. Para describir la imagen, primero debemos conocer que una señal se define como un conjunto de muestreo de datos que puede representarse por una combinación lineal de coeficientes en vectores o una base vectorial. Pocos coeficientes concentran la mayor cantidad de energía o en su defecto, la información más representativa de la señal original, mientras que una gran parte de los coeficientes que contienen la información menos representativa son despreciables en magnitud pues se hacen cero. A la combinación entre los coeficientes más representativos y los menos representativos se le conoce como vector de dispersión o vector de representación dispersa, cuya notación en la teoría del SC viene dada por  $(x)$ . Para reconstruir una señal se necesita además del vector de representación dispersa una matriz base  $(\Phi)$  también conocida como matriz de mediciones, esta matriz, proyecta en un espacio  $n$ -dimensional al diccionario  $(\Psi)$  que es una representación en base ortogonal de la señal original; la formación de la matriz base es de vital importancia pues influye de manera directa en la reconstrucción de la señal original [20], [23], [35], [36].

Al resolver el sistema de ecuaciones ilustrado en la figura 1 se obtiene una señal conocida como vector de observación porque es una aproximación a la señal original y como cualquier aproximación tiene un margen de error, su notación es  $(y)$  y también es conocido como vector de mediciones [23].

El sistema de ecuaciones ilustrado en la figura 1 a simple vista se percibe como un problema que puede ser resuelto con álgebra lineal convencional pero en realidad no es tan simple, pues presenta

indeterminaciones en el planteamiento matricial; es por eso que el SC soluciona los sistemas de ecuaciones mediante la norma de minimización  $\ell_1$ , esta norma se explica con mayor detalle en la sección II.

Son varios los algoritmos existentes para la recuperación de señales, cada uno de los algoritmos puede utilizar distintos métodos, sin embargo, a manera general para este trabajo mencionaremos dos técnicas en las que basan los algoritmos utilizados, búsqueda codiciosa y relajación convexa.

Búsqueda codiciosa: se basa en aproximaciones sucesivas de los coeficientes de la señal para depurar de forma iterativa una solución dispersa mediante identificación de uno o más componentes que producen una aproximación de la señal hasta alcanzar un criterio de convergencia [21], [24], [37].

Relajación convexa: es otro enfoque fundamental de la aproximación dispersa, que reemplaza la función combinatoria  $\ell_0$  por un problema de optimización convexa mediante la norma  $\ell_1$  [21], [24], [37].

En el presente trabajo, a través de SC se realiza la reconstrucción de tres señales armónicas distintas. La primera es una señal construida mediante el programa computacional matlab, la segunda señal proviene de la medición THD de voltaje de un transformador de distribución y la tercera procedente de la medición de corriente del mismo transformador (los detalles de la medición se explican en la sección III). Además de la reconstrucción se realiza un análisis del distinto comportamiento de los algoritmos en la restauración para cada tipo de señal; aquí, el problema radica en que, al señales que contienen armónicos, para realizar el análisis de los mismos la reconstrucción de la señal presenta una mayor complejidad en el

sentido de que la aproximación de la señal reconstruida debe ser óptima de tal manera que los armónicos estén presentes dentro la señal para su posterior análisis; es decir que el análisis armónico de la señal obtenida a través de SC debe ser lo más aproximado al análisis de la señal original. Para esto se estudiarán diferentes métodos conocidos para la reconstrucción precisa como el orthogonal matching pursuit, basit pursuit y Least Squares; posteriormente se compara cada uno de los errores de reconstrucción de estos métodos para dar el rango en porcentaje de la muestra mínima que se debe conocer para aplicar el SC en señales armónicas.

En adelante este artículo se organiza de la siguiente manera. En la sección II se describe el proceso para la reconstrucción de señales a través de SC, bajo los tres diferentes algoritmos que se estudian en el presente documento. En la sección III se plantea la formulación del problema. En la sección IV se realiza la reconstrucción de señales armónicas analizando el comportamiento en la restauración de cada una. Finalmente, en la sección V se presentan las conclusiones del presente trabajo.

## **2. Señales armónicas y su efecto en la calidad de energía**

Los sistemas eléctricos tienen actualmente un gran número de componentes llamados no lineales, que se generan a partir de formas de onda sinusoidales con la frecuencia de la red, las ondas de frecuencias diferentes causan el fenómeno conocido como armónicos. Un armónico está formado por una componente fundamental de frecuencia, más una serie de componentes superpuestas de frecuencias, múltiplos de la fundamental [8]-[10]. Es decir, las componentes múltiplo de la

fundamental se suman a la onda y la distorsionan generando una “distorsión armónica”.

Matemáticamente la técnica utilizada para determinar el contenido armónico de una onda se llama análisis de Fourier, en honor del matemático del mismo nombre que investigó este fenómeno [38], [39].

Por tanto, para realizar el análisis de armónicos, se calcula las magnitudes de la fase fundamental y las armónicas de alto orden de las formas de onda periódica, la serie resultante es la serie de fourier y establece una relación entre una función en el dominio del tiempo y una función en el dominio de la frecuencia [11].

En los sistemas eléctricos lo ideal es que las formas de onda de voltaje y corriente sean sinusoides perfectas. Sin embargo, debido al continuo uso de cargas eléctricas no lineales y dispositivos electrónicos; estas formas de onda a menudo se deforman. Equipos tales como ordenadores, iluminación electrónica, cargadores de baterías, sistemas de alimentación ininterrumpida, convertidores de potencia de corriente alterna a continua (AC-DC) entre otros, son generadores de corrientes armónicas, que en combinación con impedancias de fuente, producen distorsión de voltajes de la línea [40], [41]. Otros factores como la inclusión masiva de automóviles eléctricos también tienen un efecto sobre la calidad de la energía en la red eléctrica, ya que esta se ve afectada por el tipo de cargador utilizado en los vehículos eléctricos, puesto que, existen diferentes topologías de carga, controlada y no controlada que, aunque tengan un mismo fin, sus resultados pueden no ser los mejores produciendo fenómenos electromagnéticos tales como armónicos considerados indicadores de

calidad de energía en la red eléctrica [42].

La presencia de armónicos provoca interferencias en las señales, sobretensiones en los sistemas de potencia, aumento de la temperatura dieléctrica de los bancos de condensadores; por consiguiente disminución de su vida útil, daño total o parcial de los bancos de condensadores, distorsión de la forma de onda (calidad), quemado de fusibles, deterioro de diversos equipos del sistema eléctrico, falsos accionamientos de relés o protecciones, influyen en la medición de la potencia activa, reactiva y del factor de potencia, causan inestabilidad en sistemas de potencia, aumento de pérdidas técnicas, calentamiento excesivo en máquinas rotatorias, entre otros [4], [40], [41].

Para cuantificar la deformación de la onda se usa la expresión "Distorsión Armónica Total" (THD). Este término se define como la relación entre el valor eficaz del total de las componentes armónicas y el valor eficaz de la componente fundamental, este valor es usualmente expresado como un porcentaje de la onda fundamental [3], [41]:

$$THD_I = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2}}{I_1} \quad (1)$$

$THD_I$  es la distorsión armónica total en función de la onda de corriente.

Donde:

$k$ : número de armónica.

$I_1$ : valor eficaz de la onda fundamental de corriente.

$I_k$ : valor eficaz del armónico  $k$ .

De forma similar la distorsión armónica para la tensión se expresa:

$$THD_V = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} V_k^2}}{V_1} \quad (2)$$

En general es bastante difícil predecir los problemas de armónicos sin tomar medidas ya que el flujo y las respuestas del sistema pueden variar sustancialmente de un sistema a otro con pequeñas desviaciones tales como tolerancias del equipo, desequilibrios, etc [26], [43]–[45]

La solución de problemas existentes debido a la sensibilidad de los equipos, altas pérdidas, grandes distorsiones, entre otros, que se manifiesta como disparos de protecciones persistentes, quemaduras de fusibles, errores en la medición de energía y destrucción de equipos, pueden ser afrontados con un estudio de flujo de armónicos enfocado en las mediciones [4], [39], [41].

Muchos problemas de armónicos pueden ser resueltos de manera fácil, por ejemplo, instalando filtros, limitando algunos pasos de compensación de factor de potencia. Sin embargo, antes de llegar a una solución viable las distorsiones armónicas y sus fuentes deben ser totalmente identificadas, lo que puede hacerse basándose en los modelos de flujo de brazos o medición directa en la instalación [3], [39]. Para esto como se explica en la sección I, se necesita un sistema de medición rápido y en línea, es decir eficiente. No obstante, ningún sistema es infalible. Por lo tanto, cuando el sistema por algún fallo deje de recibir información, mediante SC señal con las mediciones que se hayan tomado como muestra se podrá establecer un estimado de la señal para realizar los análisis pertinentes.

## 2.1 Diccionario

El primer diccionario modelado puede ubicarse alrededor de los años 1960 como la Transformada Rápida de Fourier y es una colección finita de señales elementales de norma unitaria [46]. Un diccionario que puede llevar a

una representación dispersa de una señal usualmente se alcanza explotando un conjunto pre especificado de funciones de transformación como se explica en [22] con métodos de dominio de transformada o métodos de aprendizaje de diccionarios. La diferencia entre estos es que, en las metodologías de aprendizaje de diccionarios se aplican representaciones dispersas en un diccionario con información redundante, mientras que en los métodos de transformada de dominio usualmente se utilizan un grupo de funciones fijas de transformación para representar las muestras de la señal [43], [47].

El diccionario permite capturar información de una señal dispersa para que esta pueda ser utilizada por los algoritmos para la recuperación de dicha señal [20], [22], [48]. Este presenta un pequeño número de filas conocidos como vectores de medición que da como ventaja una mayor compresión de la información y menor tiempo de procesamiento. Es necesario el estudio de varios diccionarios con el fin de encontrar aquellos que permitan la recuperación óptima de la señal utilizando el menor número de vectores de medición. La construcción de la matriz base o diccionario es una tarea dispendiosa en la cual es de importancia crítica satisfacer las propiedades que garanticen la recuperación de la señal con la menor cantidad posible de mediciones, es por esta razón que en [26], [37], [44] se estudian técnicas de reconstrucción de matrices de sensado determinísticas, las cuales, satisfacen las propiedades de recuperación pero no necesitan de una cantidad grande de medidas.

En este documento se asume inicialmente conocido y fijo el diccionario ( $\Psi$ ). Por lo tanto, la tarea de selección del diccionario que mejor represente la señal de interés es de vital

importancia, ya sea este un diccionario pre especificado (formado posiblemente por una base ortogonal o combinación de bases ortogonales) o diseñado para ajustarse de la mejor manera posible al modelo de poca densidad establecido y debido en función de los datos que se representaran [49], [50].

## 2.2 Representación dispersa con la minimización de la norma $\ell_0$ y $\ell_1$

Desde el punto de vista del álgebra lineal, si no hay ningún conocimiento previo o alguna restricción impuesta la solución de la ecuación  $y = \Phi x$  es un problema mal representado y nunca tendrá una única solución [21]. Es decir, es imposible utilizarla para representar la muestra detectada usando la matriz de medición  $\Phi$ . Para mitigar esta dificultad, es factible imponer una función o restricción regularizadora en la representación de la solución.

La solución de representación más dispersa puede ser obtenida resolviendo el sistema de representación lineal  $y = \Phi x$  con la restricción de minimización de la norma  $\ell_0$ . Este problema puede ser convertido al siguiente problema de optimización [23].

$$x = \operatorname{argmin} \|x\|_0 \text{ s. t } y = \Phi x \quad (3)$$

Si  $k$  átomos de la matriz de mediciones son utilizados para representar la muestra detectada entonces la ecuación anterior será equivalente al siguiente problema de optimización, llamado problema de aproximación  $k$ -disperso.

$$y = \Phi x \text{ s. t } \|x\|_0 \leq k \quad (4)$$

La norma  $\ell_1$  se ha utilizado extensivamente en aplicaciones como el aprendizaje automático, el reconocimiento de patrones y las estadísticas. Aunque el método de representación dispersa con la norma de minimización  $\ell_0$  puede obtener la



solución dispersa fundamental, el problema es todavía un problema polinomial fuerte no determinístico y la solución es difícil de aproximar [43]. El problema de optimización de la norma  $\ell_1$  tiene una solución analítica [37]. De esta forma, los métodos extensos de representación dispersa con la minimización de la norma  $\ell_1$  se han propuesto para enriquecer la teoría del SC. Se usan generalmente para solucionar los siguientes problemas [35].

$$x = \operatorname{argmin} \|x\|_1 \text{ s.t } y = \Phi x \quad (5)$$

$$x = \operatorname{argmin} \|x\|_1 \text{ s.t } \|y - \Phi x\| < \varepsilon \quad (6)$$

### 2.3 Sensado comprimido

Para el proceso de SC las mediciones son tomadas por el sistema lineal obtenido como resultado del producto de un vector escaso de la señal de entrada y la matriz base [25], [51]. La ecuación básica en su forma matricial de la detección comprimida es la siguiente:

$$y = \Phi x \quad (7)$$

Donde  $x$  es una señal discreta, de longitud finita, unidimensional y compresible,  $\Phi$  es la matriz base para la reconstrucción de tamaño  $m \times n$  que no depende de las mediciones adquiridas y  $y$  el vector de observación que contiene la información importante acerca de la señal  $x$  [4], [7], [13], [16]–[18], [30], [52].

De manera general para  $x[n]$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) que vemos como un vector columna  $n \times 1$ ; el objetivo es encontrar una secuencia de medidas  $y[m]$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ), de manera que sea posible recuperar la señal original con poca o ninguna pérdida de información, siendo  $M$  un valor menor que  $n$  [48]. El interés de que la señal debe ser discreta tiene el propósito de simplificar las

representaciones del método [16], [37], [47], [52].

Matemáticamente  $x \in R^n$ , se puede representar como una señal dispersa en una base ortogonal que define los elementos de un diccionario, donde,  $\Psi = \{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \dots, \Psi_N\}$ ;  $\Psi_n = \{\Psi_{1n}, \Psi_{2n}, \Psi_{3n}, \dots, \Psi_{Nn}\}^T$  y  $s = [s_1, s_2, \dots, s_N]$  donde  $N$  es el tamaño de la señal,  $n = (1, \dots, N)$  y  $x$  puede representarse como una combinación lineal de  $k$  funciones base [26], [53].

$$x = \Psi_s = \sum_{n=1}^N s_n \Psi_n \quad (8)$$

Así,  $x$  es una señal dispersa si es posible aproximarla como una combinación lineal de sólo  $k$  vectores de  $\Psi$ . Es decir, si  $k$  coeficientes  $s_n$  poseen valores significativos. Sin embargo, es de mayor interés de estudio aquellos casos donde  $k$  es mucho menor que  $N$  ( $k \ll N$ ), pues, esto significa que  $x$  es poco densa, por lo tanto, es comprimible en un vector de observación de menor dimensión [8], [24], [25], [37], [54].

La secuencia de medidas,  $y[m]$ , se obtiene al proyectar el vector  $x = [x[1], \dots, x[N]]^T$  ( $[x]^T$  matriz pseudoinversa de  $x$ ) [48], en un nuevo espacio  $M$ -dimensional, representado por una base obtenida de forma aleatoria, tal que:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \dots & \Phi_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{M1} & \dots & \Phi_{MN} \end{bmatrix} [\Phi_1 \dots \Phi_N] \quad (9)$$

$$\Phi_n = [\Phi_{1n} \dots \Phi_{Mn}]^T \quad (10)$$

En donde las componentes de  $\Phi$  están dadas por variables aleatorias tipo Gaussianas. Para que la proyección resultante,  $y[m]$  contenga la información relevante que permita la reconstrucción de  $x[n]$  con muy poca pérdida de información, esta última

debe ser dispersa en el dominio  $\Psi$  que es el vector de mediciones [52], [55].

Cuando se capturan datos, a menudo es conveniente expandirlos en una nueva base [30], [32], [55], [56]. En el caso de técnicas de compresión "con pérdidas", se eligen bases vectoriales, por ejemplo diccionarios redundantes, de manera que la gran mayoría de los coeficientes de la señal transformada será cercana o igual a cero. Si estos coeficientes de valor aproximadamente cero son simplemente eliminados, la cantidad de espacio requerido para almacenar la señal se reduce significativamente. La detección de compresión explora la posibilidad de registrar datos directamente en su estado comprimido; permitiendo no sólo las ventajas de ahorro de espacio de los datos comprimidos, sino también ahorrando tiempo, complejidad y procesamiento de compresión [17].

Se debe conocer los múltiples elementos que conforman las ecuaciones. En diferentes textos manejan distinta nomenclatura, sin embargo, el principio de compresión es el mismo. El parámetro  $y$  es un vector cuyos elementos pertenecen a los números reales ( $y \in \mathbb{R}$ ) considerado la señal ideal a la cual se quiere llegar. Cuando se habla del modelo estándar, para entender de mejor manera la representación matricial se puede dividir en otros elementos como:

$$y = \Phi x = \Phi \Psi s = \theta s \quad (11)$$

Donde como ya se explicó anteriormente  $\Phi$  es la matriz base y cada fila de dicha matriz es un vector de medición  $\Phi_{Mn}^T$ ,  $s$  es un vector de coeficientes con  $k$  elementos distintos de cero y  $\theta = \Phi \Psi$ , es denominada matriz de reconstrucción de la señal pues es el producto matricial de la matriz base y la de representación [11], [30], [48].

A diferencia de los métodos tradicionales de muestreo, las medidas contenidas en  $y$ , son suficientes para recuperar  $x$ ; sin embargo, para que esto se cumpla se debe verificar la incoherencia entre la base de medición  $\Phi$  y la base de representación  $\Psi$ , esto significa que las filas de  $\Phi$  no puedan representar de manera dispersa las columnas de  $\Psi$  [24].

## 2.4 Algoritmos de reconstrucción de señales

Para resolver problemas del SC con matrices incompletas existen técnicas de optimización convexa y métodos basados en aproximaciones iterativas con condiciones de convergencia también conocidos como algoritmos de búsqueda codiciosa [35].

La búsqueda codiciosa se basa en aproximaciones continuas de los coeficientes de la señal, estableciendo de manera iterativa el soporte de la señal hasta conseguir un criterio de convergencia, en otras palabras procuran resolver un problema a través de la construcción de una solución en una serie de pasos [35].

Los algoritmos basados en optimización convexa son otro enfoque fundamental de aproximación dispersa, los cuales reemplazan la función combinatoria  $\ell_0$  con la función convexa  $\ell_1$ , lo cual, convierte el problema combinatorio en un problema de optimización convexa, concretamente [35], la norma  $\ell_1$  es la función convexa más aproximada a la función  $\ell_0$ . Es decir la optimización convexa es la aplicación de la norma  $\ell_1$ . Dentro de las técnicas computacionales para resolver problemas de aproximación dispersa ya mencionadas antes, existen varios algoritmos específicos para recuperar señales, en este trabajo se utilizan tres algoritmos distintos como son el least squares

(LQ), Basic Pursuit (BP), Ortogonal Matching Pursuit (OMP).

Least squares (LQ), en español mínimos cuadrados, es considerado como un algoritmo clásico de reconstrucción. Matemáticamente, sea un conjunto de  $n$  puntos en el plano real,  $\{x_i, y_i\}^n$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano real y sea  $\{f_j(x)\}^m$  una base de  $m$  funciones linealmente independiente en un espacio de funciones; lo que busca el método de mínimos cuadrados es encontrar una función  $f(x)$  que sea combinación lineal de las funciones base, de modo que  $f(x_i) \approx y(i)$  [58], esto es:

$$f(x) = \sum_{j=1}^m c_j f_j(x) \quad (12)$$

Donde  $c_j$  serán los coeficientes que hagan que la función  $f(x)$  dé la mejor aproximación para los puntos dados, por tanto, la ecuación 12 se puede expresarse en función de los coeficientes como:

$$na_0 + \left(\sum x_i\right) a_1 = \sum y_i \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \left(\sum x_i\right) a_0 + \left(\sum x_i^2\right) a_1 \\ = \sum x_i y_i \end{aligned} \quad (14)$$

Donde  $a_0$  representa los coeficientes de la pendiente y  $a_1$  el punto de corte de la recta con el eje de las ordenadas.

LQ pretende encontrar la solución al problema a través de cuadrados mínimos que resuelven la ecuación  $y = \Phi \Psi s$  con  $s$  como la representación dispersa de la señal [51], [59], [60]. Utiliza la norma de minimización  $\ell_2$  y su ecuación se expresa mediante:

$$x = \operatorname{argmin} \|x\|_2 \text{ s.t } y = \Phi \Psi s \quad (15)$$

Basic Pursuit (BP), en español búsqueda base, es un algoritmo que utiliza la

norma de minimización  $\ell_1$ , porque esta norma proporciona por optimización convexa un vector lo suficientemente disperso permitiendo que BP de solución a matrices muy mal condicionadas o incompletas. BP se basa en optimización global por lo que puede resolver problemas mediante aproximaciones iterativas de forma más estable [43], [51].

$$x = \operatorname{argmin} \|x\|_1 \text{ s.t } y = \Phi x \quad (16)$$

Ortogonal Matching Pursuit (OMP), en español búsqueda ortogonal de coincidencia, es una heurística que utiliza la búsqueda codiciosa para recuperar señales de representación dispersa con alta densidad de ruido, OMP trabaja buscando en la matriz base el vector con mayor relación al vector de observación, es decir busca en el diccionario el vector que más relación tenga con la señal que se está analizando y lo compara con la señal residual, la señal residual es la diferencia entre la señal estimada parcialmente y la señal de observación, este proceso se repite de manera sucesiva hasta lograr obtener un vector que cumpla con la condición de convergencia, cuya ecuación general se expresa como [22], [43], [61], [62]:

$$\operatorname{argmin} \|y - \phi x\|_2 \quad (17)$$

Por tanto, los métodos relacionados con BP adoptan una técnica de optimización convexa, mientras que los métodos relacionados con MP utilizan la búsqueda codiciosa y las ideas de proyección de vectores [43][28].

Los dos métodos tanto el de búsqueda codiciosa como optimización convexa, permiten la recuperación de la señal original siempre que se cumplan con una cantidad adecuada de mediciones, sin embargo, dada la naturaleza de la búsqueda codiciosa que construye y corrige progresivamente el soporte de la

solución, una distribución rápidamente decaída es mejor que los algoritmos basados en la relajación convexa, ya que requiere una menor cantidad de mediciones; por otro lado, los algoritmos basados en la optimización convexa tienden a tener un comportamiento más consistente, por lo tanto, la calidad de la solución tiende a disminuir la tasa de caída de la distribución de la señal [37], [44].

La búsqueda codificada puede ampliarse a la base del modelo SC, en la que las señales no sólo están dispersas, sino que sus soportes están restringidos a ciertos modelos, como las estructuras arbóreas; algunos de estos modelos son difíciles de representar como modelos de optimización convexa; por otro lado, es difícil extender la búsqueda codificada a funciones objetivas o a funciones energéticas [63], [64]. La optimización dispersa acepta naturalmente funciones y restricciones objetivas de muchos tipos, especialmente si son convexas; sin embargo, si un problema puede ser resuelto por los dos métodos, se debe examinar la tasa de caída de la distribución de la señal [10], [20].

### 3. Formulación del problema

Se considera una red eléctrica donde para la evaluación de la calidad de energía es parte clave la medición de señales armónicas, por lo tanto, se tiene implementado un sistema de medición inteligente que permita el análisis armónico rápido y en línea siendo esto una función importante en las redes inteligentes, sin embargo, esto enfrenta nuevos retos, pues aunque se implementen arquitecturas de medición distribuidas donde el centro de operaciones requiere sólo una fracción de la información recopilada, por los problemas expuestos en la sección I los datos que lleguen al centro de operaciones pueden ser insuficientes. Es por esto que el alcance de este artículo

es utilizar el SC bajo la norma de minimización  $\ell_1$  para la reconstrucción de señales armónicas, puesto que el SC se reduce la longitud de muestreo.

Para la aplicación de esta metodología se utiliza tres señales armónicas diferentes con el objetivo de analizar el comportamiento en la reconstrucción de cada una, pues las tres señales tienen distinto grado de distorsión armónica.

Partimos del hecho de que para la aplicación de la teoría del SC que permite reconstruir señales a partir de un número limitado de datos siempre es necesario conocer algo de la señal, es decir, se conoce alguna característica de la muestra a analizar como su comportamiento o forma de onda. Para este trabajo al ser señales armónicas se sabe que estas pueden ser dispersas en bases de transformadas de Fourier como se explica en la sección I. Entonces, dada la naturaleza de las señales armónicas podemos asimilar que el diccionario ( $\Psi$ ) pueda estar dado en función de wavelets, debido a que estas son un tipo de transformada capaz de concentrarse en fenómenos transitorios y de alta frecuencia mejor que la Transformada de Fourier, por tanto, el tipo de diccionario  $\Psi$  que se implementa para la compresión es importante para obtener la mejor reconstrucción posible con el mínimo error, para esto, se utiliza un diccionario con diferentes funciones wavelets y para garantizar que el diccionario elegido es el mejor respecto a señales armónicas, se utiliza  $\Psi$  para tres de señales con distintos grados de THD. La primera señal se construyó por medio de un programa computacional (Matlab) mediante la transformada de Fourier de la función seno y se introdujo armónicos de quinto orden. Para esto, la formulación se realiza mediante la ecuación (18) en la que se expresa la representación matemática de la transformada de Fourier de una función

impar, en este caso la función seno que cumple la condición de imparidad puesto que, como se expresa en [58] para que una función sea impar  $f(-x) = -f(x)$ , por tanto, como el  $\sin(-x) = -\sin(x)$  la ecuación se representa de la siguiente manera:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^k b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \quad (18)$$

$$b_n = \frac{\pi \sin(\pi n)}{n^2 - 1} \quad (19)$$

$$k = 2n + 1 ; n \in [0, 2]$$

Donde  $a_0$  y  $b_n$  son los coeficientes de la serie de Fourier [58], para  $a_0 = 0$  y  $b_n$  como resultado de la ecuación 19; por otro lado,  $k$  tiene un valor máximo de 5, de esta manera la señal resultante pertenece al quinto armónico.

La segunda señal fue tomada de la medición THD de voltaje de un transformador de distribución, y la tercera de la medición THD de corriente del mismo transformador.

Por tanto, de manera general para la ejecución del algoritmo aplicando la teoría del SC, se perderá aleatoriamente datos a cada una de las señales originales ( $x$ ) en función de un porcentaje de muestra, luego la nueva muestra será tomada por el programa para reconstruirla, para esto utiliza el diccionario ( $\Psi$ ) que debe ser capaz mediante algunas iteraciones ( $t$ ) en el programa de aproximar la muestra a una representación dispersa lo más semejante posible a la señal original ( $x$ ), por esta razón se probará el programa con varios diccionarios ( $\Psi$ ) hasta encontrar el más idóneo; para esto se calculará el error  $\varepsilon$  mediante la norma  $\ell_1$  y  $\ell_2$  utilizando el residuo ( $r$ ) que es la diferencia entre la señal original y la señal reconstruida.

Entonces, se tiene una señal ( $x$ ) con  $n$  cantidad de datos, a la cual, se le

perderá información mediante un vector de posiciones aleatorias  $v_p$ , este tomará sólo cierta cantidad (%) de los datos totales de la señal dándonos así una nueva señal con un número menor de muestras respecto de la original, a esta nueva señal se le llamará muestra y se le denota como  $xm_s$  para  $s = [1, 2, 3]$  puesto que se trabaja con tres señales distintas.

A esta nueva señal de  $m$  cantidad de datos (teniendo en cuenta que  $m < n$ ) la vamos a reconstruir mediante SC; para esto implementamos un diccionario considerando que los diccionarios utilizados en la recuperación de imágenes son diferentes en el sentido de que son creados de manera aleatoria. Mientras que, para definir un diccionario en la reconstrucción de señales, consideramos el comportamiento y características de estas; es por esto que una vez identificadas las características se definen varias señales (entre estas wavelets) para que pertenezcan al diccionario  $\Psi$ , teniendo así algunas posibilidades para la ejecución de los algoritmos con varios diccionarios.

Se ejecuta el programa con un número de iteraciones  $t$  que se definen en base del cálculo del error  $\varepsilon$ , este cálculo influirá directamente en la elección del diccionario más idóneo, pues se ejecutará los tres algoritmos; least squares (LQ), Basic Pursuit (BP), Orthogonal Matching Pursuit (OMP) dentro de un mismo programa, con el mismo número de datos de muestra  $xm_s$  y el mismo número de iteraciones  $t$  hasta lograr reducir lo máximo posible  $\varepsilon$  y definir cuál de todos los  $\Psi$  utilizados tuvo un  $\varepsilon$  menor en la reconstrucción asemejándose de mejor manera a cada una de las señales.

Como se mencionó previamente la primera señal  $xm_1$  fue creada mediante matlab, esta se creó a partir de la onda fundamental de la función seno a la cual

se le introdujo mediante una matriz aleatoria un grado 5 de distorsión armónica, obteniendo como resultado una señal armónica con 1000 datos, esta señal tiene distorsión, sin embargo, a diferencia de una señal real medida el THD no es tan alto, es decir los picos de distorsión son menores en comparación a otras señales. Por esto se espera que la reconstrucción con cada uno de los algoritmos sea idónea. Para la segunda señal  $xm_2$  se tiene la medición THD de voltaje de un transformador de 50 kVA, cuyas mediciones fueron tomadas durante 7 días en intervalos de 10 minutos con un total de 1008 datos. A diferencia de la anterior esta es una señal real cuya distorsión armónica es considerable, por consiguiente, la reconstrucción de esta tenderá a dificultarse más que para  $xm_1$ . Mientras que para  $xm_3$  obtenida de la medición de THD de corriente del mismo transformador y con el mismo tiempo de medición se tiene 1008 datos cuya distorsión es mucho mayor a las otras dos. Así, como las tres señales son de naturaleza armónica pero con distinto nivel de distorsión se espera encontrar un único diccionario  $\Psi$  que sea capaz con el menor número de mediciones posibles reconstruir las tres señales con los tres algoritmos para poder realizar comparaciones y encontrar el mínimo porcentaje de muestra que se necesita para la reconstrucción con el mínimo error posible.

Las características del transformador y los tiempos de medición para la obtención de las señales se pueden ver en la tabla 1 y 2.

Datos	
Fases	3
Potencia nominal (kVA)	50
Voltaje f-f (V)	210
Voltaje f-n (V)	121
Dmax (kW)	37,63

Dmax (kVA)	40,38
Fp Dmax	0,932
Dmin (kW)	8,93
Dmin (kVA)	9,42
Fp Dmin	0,948
Dprom (kW)	19,82
Dprom (kVA)	21,42
Fp Dprom	0,925
Energía (kWH)	3,1
Zona	U (Urbano)
P. promedio kW	19,81
P. máxima kW	37,63
P. mínima kW	8,93
Fp a D. promedio	0,92
Fp a D. máxima	0,93
Fp a D. mínima	0,94
I1 a D. promedio	35,1
I2 a D. promedio	43,2
I3 a D. promedio	91,5

**Tabla 1.** Datos de las características del transformador.

Datos	
Fases	3
Equipo Instalado	FLUKE 1744
Número de Serie	20905
Días de Lectura	7
Intervalo de registro (min)	10
Número de registros	1008

**Tabla 2.** Datos del equipo y tiempo de medición.

A continuación, se muestra en la tabla las distintas variables utilizadas.

Parámetros y variables	Interpretación
------------------------	----------------

$\mathbb{R}$	Conjunto de números reales
$x$	Señal original
$n$	Número de mediciones de la señal
$y$	Vector de observación, señal ideal a reconstruir
$m$	Número de elementos a la salida del SC
$\Phi$	Matriz de proyecciones
$\Psi$	Diccionario
$xm_s$	Muestra de la señal original
$\phi_i$	La i-ésima columna para la matriz de detección
$\phi_j$	La i-ésima fila para la matriz de detección
$\Theta$	Matriz de reconstrucción de la señal
$\hat{x}$	Señal obtenida, solución recuperada
$k$	Número de elementos distintos de cero
$n_t$	Posición más cercano al residuo del vector $\Phi_i$
$im_t$	Matriz de almacenamiento de los índices de $\Phi$
$v_p$	Vector de posiciones aleatorias
$[]^T$	Matriz pseudoinversa
$P$	Vector de porcentajes para toma de la muestra

De manera esquemática cada uno de los algoritmos aplicados en la teoría del SC pueden ser explicados mediante:

#### Algoritmo 1: Least squares

##### Paso 1

Definir variables de entrada.

$x \rightarrow$  Señal original

$\Psi \rightarrow$  Diccionario

$P \rightarrow$  Porcentaje de datos (muestra)

##### Paso 2

Inicialización de variables.

$t = 0 \rightarrow$  Iteraciones

$r^0 = y \rightarrow$  Residuo

##### Paso 3

$x_m \rightarrow$  Reducir  $x$  en función de  $P$

##### Paso 4

for  $t \in [1, 2, \dots, n]$

Calcular posiciones:  $n_t = \arg \max \frac{|r_{t-1}, \phi_i|}{\|\phi_i\|}$

Almacenar índices:  $im_t = im_{t-1} \cup \{n_t\}$

Estimación de la tendencia: ecuaciones (13), (14)

Compresión  $y = \Phi x$

Almacenar coeficientes:  $\phi_t = \phi_{t-1} \cup \{\Psi_{n_t}\}$

$\Phi = \phi_t$

Calcular  $\theta = \Psi \Phi$

Calcular  $s = \theta^\dagger * y$

Solución aparente:

$$x_t = \arg \min \|x\|_2$$

end for

##### Paso 5

Cálculo del error

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^n (x(n) - \hat{x}(n))}{\sum_{i=1}^n x(n)} * 100$$

##### Paso 6

Salida:

$$\hat{x}_{est} = \Psi s$$

Paso I: definir todas las variables de entrada. Para este trabajo el diccionario ( $\Psi$ ) es específico, por tanto es una variable de entrada.

Paso II: paso de inicialización, se inicia el contador de iteraciones en 0; en la primera iteración el residuo es el mismo vector de medición para que el estimado de la señal sea lo más semejante a la señal original y el error tienda a cero.

Paso III: vector que toma una muestra de la señal original en función de un porcentaje.

Paso IV: se proyecta el residuo sobre cada una de las columnas del diccionario para conseguir cuál de sus columnas es la que mayor semejanza tiene con el residuo; de la solución del problema de mínimos cuadrados se obtiene el estimado de la señal como solución de las ecuaciones 13 y 14. Calculamos el nuevo estimado de la señal al proyectar la solución obtenida para problemas de mínimos cuadrados sobre la nueva matriz de medición. Se actualizará el residuo restando el estimado de la señal al conjunto de mediciones original.

Paso V: se calcula el error de reconstrucción de la señal.

Paso VI: encontrar la señal reconstruida escogiendo los átomos del diccionario que originalmente conformaron la señal.

---

**Algoritmo 2: Basic pursuit**


---

**Paso 1**

Definir variables de entrada.

$x \rightarrow$  Señal original

$\Psi \rightarrow$  Diccionario

$P \rightarrow$  Porcentaje de datos (muestra)

**Paso 2**

Inicialización de variables.

$t = 0 \rightarrow$  Iteraciones

$r^0 = y \rightarrow$  Residuo

**Paso 3**

$x_m \rightarrow$  Reducir  $x$  en función de  $P$

**Paso 4**

for  $t \in [1, 2, \dots, n]$

Calcular posiciones:  $n_t = \arg \max \frac{|r_{t-1}, \phi_i|}{\|\phi_i\|}$

Almacenar índices:  $im_t = im_{t-1} \cup \{n_t\}$

Compresión  $y = \Phi x$

Almacenar coeficientes:  $\phi_t = \phi_{t-1} \cup \{\Psi_{n_t}\}$

$$\Phi = \phi_t$$

Calcular  $\theta = \Psi \Phi$

Calcular  $s = \theta^\dagger * y$

Normalización  $\rightarrow \ell_1$

Aproximación dispersa de  $x$

$$x = \Psi s$$

Matriz pseudoinversa  $\Phi_{Mn}^T$

Solución aparente:

$$x_t = \arg \min \|x\|_1$$

end for

**Paso 5**

Cálculo del error

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^n (x(n) - \hat{x}(n))}{\sum_{i=1}^n x(n)} * 100$$

**Paso 6**

Salida:

$$\hat{x}_{est} = \Psi s$$


---

Los pasos I, II, III se repiten para los tres algoritmos.

Paso IV: se proyecta el residuo sobre cada una de las columnas del diccionario para conseguir cuál de sus columnas es la que mayor semejanza tiene con el residuo. Se encuentra el estimado para esa componente de la señal proyectando el residuo sobre la componente del diccionario que generó la máxima proyección. Se actualiza el residuo restándole la contribución que este átomo del diccionario aportó al conjunto de mediciones. Se suma el estimado de la señal para esta componente a la señal reconstruida. Se

encuentra una solución aparente bajo la norma de minimización  $\ell_1$ . Si se cumple el criterio de parada, que la norma del residuo sea menor al valor deseado, el algoritmo para, si no vuelve a realizar el procedimiento.

Paso V: se calcula el error de reconstrucción de la señal.

Paso VI: encontrar la señal reconstruida escogiendo los átomos del diccionario que originalmente conformaron la señal.

---

**Algoritmo 3: Orthogonal matching pursuit (OMP)**


---

**Paso 1**

Definir variables de entrada.

$x \rightarrow$  Señal original

$\Psi \rightarrow$  Diccionario

$P \rightarrow$  Porcentaje de datos (muestra)

**Paso 2**

Inicialización de variables.

$t = 0 \rightarrow$  Iteraciones

$r^0 = y \rightarrow$  Residuo

**Paso 3**

$x_m \rightarrow$  Reducir  $x$  en función de  $P$

**Paso 4**

for  $t \in [1, 2, \dots, n]$

Calcular posiciones:  $n_t = \arg \max \frac{|r_{t-1}, \phi_i|}{\|\phi_i\|}$

Almacenar índices:  $im_t = im_{t-1} \cup \{n_t\}$

Almacenar coeficientes:  $\phi_t = \phi_{t-1} \cup \{\Psi_{n_t}\}$

$$\Phi = \phi_t$$

Solución aparente:

$$x_t = \arg \min \|y - \Phi_t x\|_2$$

Aproximación:  $\hat{x} = \Phi_t x_t$

For

Residuo:  $r_t = y - \hat{x}$

end for

**Paso 5**

Cálculo del error

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^n (x(n) - \hat{x}(n))}{\sum_{i=1}^n x(n)} * 100$$

**Paso 6**

Salidas:

$$\hat{x}_{est}(im_t) = x_t$$


---

Los pasos I, II, III, se repiten para los tres algoritmos.

Paso IV: se proyecta el residuo sobre cada una de las columnas de la matriz de mediciones para conseguir cuál de sus columnas es la que mayor



semejanza tiene con el residuo. En el conjunto  $im_t$  se incorpora en cada iteración el índice correspondiente al átomo del diccionario que maximizó la proyección efectuada en  $n_t$ . Además la matriz  $\phi_t$  va almacenando en cada iteración la componente de la matriz de mediciones que produce la máxima proyección. Calculamos el nuevo estimado de la señal al proyectar la solución obtenida, el residuo se actualizará restándole el estimado de la señal al conjunto de mediciones original. Se encuentra una solución aparente bajo la norma de minimización  $\ell_2$ . Si se cumple el criterio de parada, que la norma del residuo sea menor al valor deseado, el algoritmo para, si no vuelve a realizar el procedimiento.

Paso V: se calcula el error de reconstrucción de la señal.

Paso VI: obtener el estimado de la señal. El estimado de la señal  $\hat{x}_{est}$ , tiene componentes distintas de cero en las posiciones indicadas por el conjunto de índices  $im_t$ , el valor del estimado en la posición  $im_t$  será igual a la componente  $j$ -ésima de  $x_t$ .

#### 4. Análisis de Resultados

Para el análisis de resultados se utiliza las tres señales antes mencionadas a las cuales se aplican diferentes diccionarios en los tres algoritmos hasta lograr definir cuál es el  $\Psi$  más adecuado para el tipo de señales de estudio. Para analizar el rendimiento de la teoría de sensado comprimido en los diferentes casos de estudio se cuantifica el error, entre la señal original y la señal reconstruida. Para esto se utiliza el residuo y se calcula el error bajo las normas  $\ell_1$  y  $\ell_2$  mediante las ecuaciones 20 y 21 respectivamente.

$$Error_{l_1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x(n) - \hat{x}(n))}{\sum_{i=1}^n x(n)} * 100 \quad (20)$$

$$Error_{l_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x(n) - \hat{x}(n))^2}{\sum_{i=1}^n x(n)^2}} * 100 \quad (21)$$

El análisis de resultados se estructura en tres casos de estudio, consecuente a cada una de las distintas señales. Por lo tanto, después de realizar pruebas con distintos diccionarios desde, uno conformado con 12 señales que corresponde a {'db4',2}, 'dct', 'sin', {'sym4',1}, {'sym4',4} hasta uno con 6 señales; se define como el más idóneo en la reconstrucción de armónicos para los tres algoritmos el diccionario {'db4',1}, 'dct', 'sin', {'sym4',1}, que corresponde a señales sinusoidales, transformadas discretas del coseno, Symlets y Daubechies, ambas miembros de la familia de wavelets. Consecuente al diccionario definido y unificado se analiza los resultados de la primera señal  $xm_1$  en donde su THD es igual a 5.

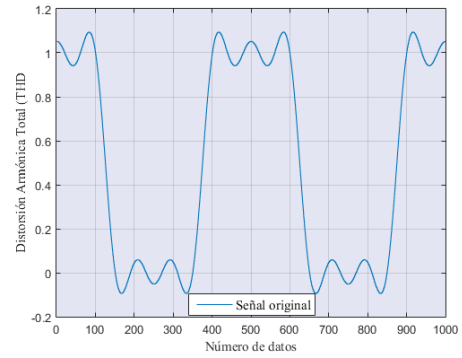
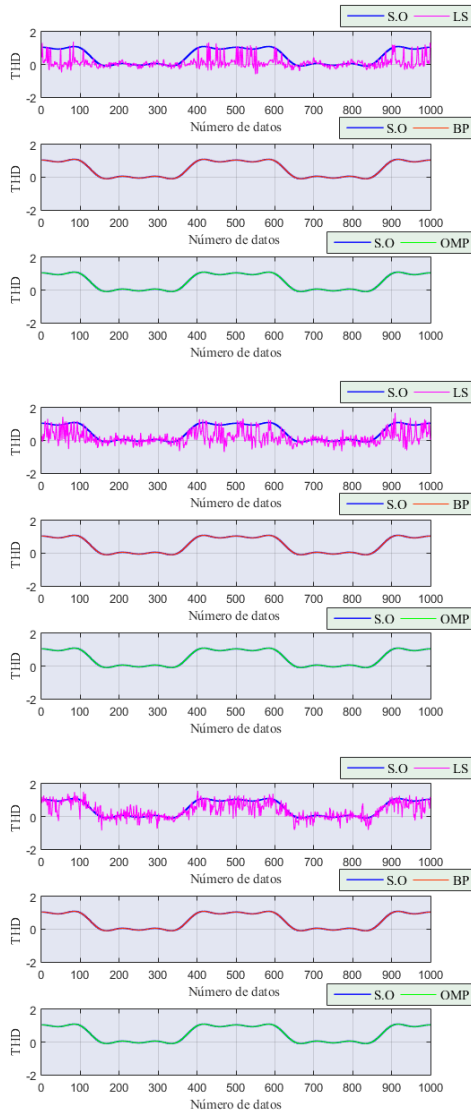


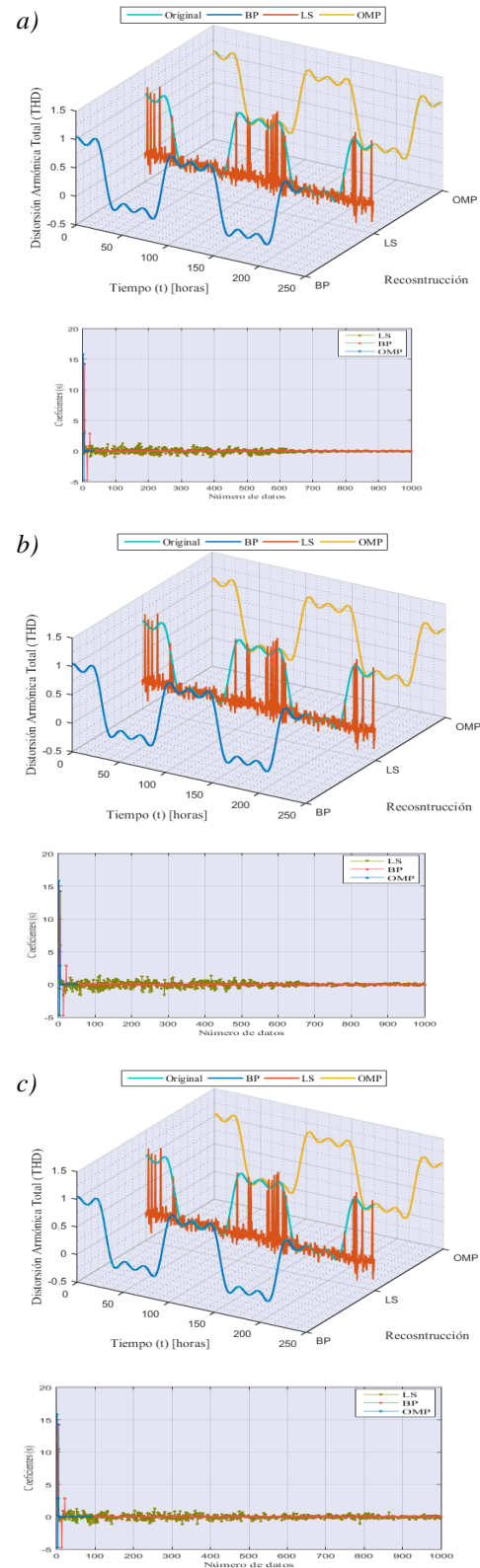
Figura 2. Señal armónica con grado THD igual a 5.

Los resultados de la reconstrucción de  $xm_1$  se pueden observar en la figura 3, para el 30%, 50% y 90% de datos de la señal original, como se puede observar tanto el BP como el OMP tienen rendimiento similar y reconstruyen la señal muy semejante a la original para los tres valores de porcentaje, incluso con un número reducido de muestras el error es casi cero, cosa que no pasa con el LQ que aunque su reconstrucción también es buena, es notoria la diferencia al recuperar la señal con un error de hasta 28,12 % para el 90 por ciento de los datos bajo la norma  $\ell_1$ .



**Figura 3.** Reconstrucción de la primera señal utilizando un diccionario unificado en los tres algoritmos, tomando de la señal original el 30% ,50% y 90% de datos respectivamente.

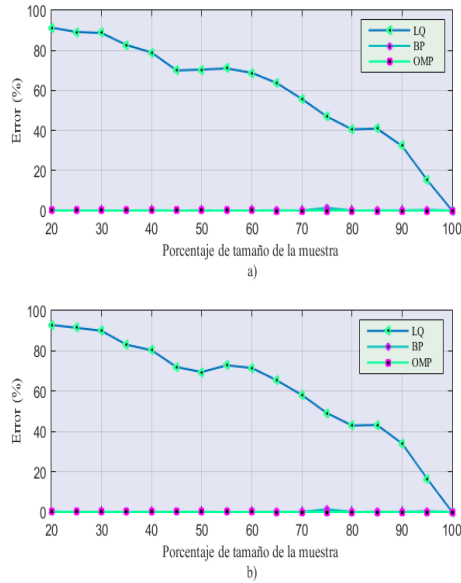
Para poder apreciar desde otra perspectiva la reconstrucción de cada uno de los métodos, en de la figura 4 se muestran las gráficas en tres dimensiones, también podemos verificar los resultados de la representación a señales dispersas de la original, es decir los coeficientes (s) para cada uno de los algoritmos de reconstrucción. De igual manera se puede apreciar que para el primer caso de estudio el algoritmo least squares es el menos eficiente, donde los errores de reconstrucción distan bastante de los otros dos métodos.



**Figura 4.** Reconstrucción en vista 3D y coeficientes de la representación dispersa de la primera señal utilizando un diccionario unificado en los tres algoritmos, tomando de la señal original el a) 30%, b) 50% y c) 90% de datos respectivamente.

Por esta razón en la figura 5 se presentan los errores en la reconstrucción de  $xm_1$  desde 20% en

pasos de 5 hasta el 100%, donde el error de los métodos BP y OMP tienden a cero aun con el número de muestras muy recudido, mientras que el error del LQ es variante de manera directamente proporcional al porcentaje de la muestra con un error de 85% para el 30 por ciento de las muestras hasta 28.12 % para el 90 por ciento de los datos bajo la norma  $\ell_1$ .



**Figura 5.** Error de reconstrucción de la primera señal, con intervalo en pasos de 5 del 20% a 100% de la toma de datos. a) Error utilizando la norma  $\ell_1$ . b) Error utilizando la norma  $\ell_2$ .

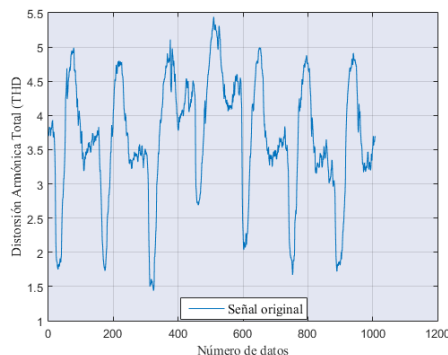
En la figura 5 se puede observar que los errores de reconstrucción para el método del BP como el OMP tienen a cero a lo largo del intervalo, siendo notoria la diferencia con el LQ, por tanto de la figura 5 podemos decir que el método que peor reconstruye la señal es el LQ y los que mejor reconstruyen la señal son el OMP y BP.

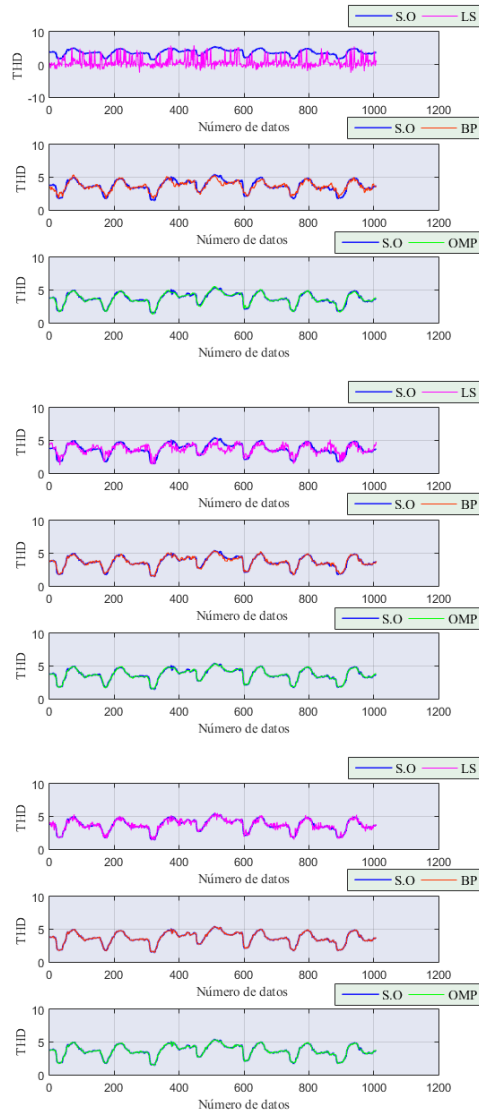
En la figura 6 se tiene la señal de segundo caso de estudio  $xm_2$ , cuyo THD en comparación a la primera señal es mayor, con ciertos picos de

distorsión, puesto que corresponde a la medición de la distorsión armónica de onda de voltaje de un transformador.

**Figura 6.** Señal armónica correspondiente a la medición de THD de la onda de voltaje de un transformador.

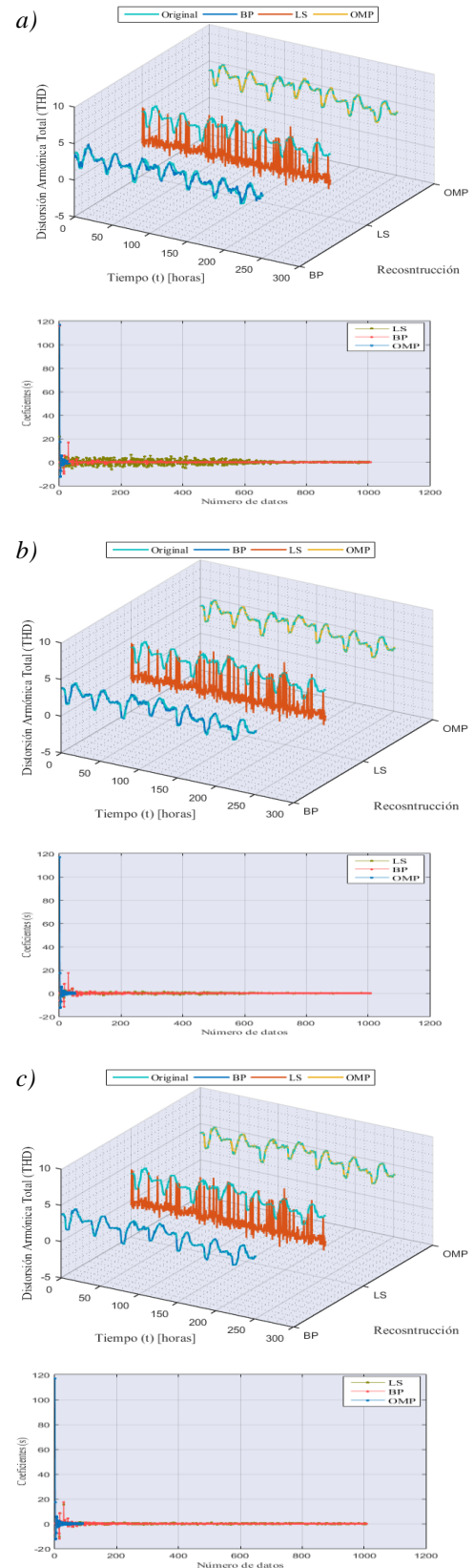
La reconstrucción de  $xm_2$  está representada en la figura 7, aquí es diferente el comportamiento de los algoritmos en la recuperación de la señal comparada a  $xm_1$ , pues a diferencia del primer caso donde tanto el BP como el OMP reconstruían la señal de manera semejante y con un error casi nulo; para  $xm_2$  se evidencia que el algoritmo que reconstruye de mejor manera es el orthogonal matching pursuit. Por lo tanto, en esta señal es más notoria la variación de la reconstrucción en función del porcentaje de muestra, evidenciando que mientras mayor es el porcentaje de datos mejor es la reconstrucción. No obstante, como en el primer caso el algoritmo menos eficiente es el LQ que aun con el 90 % de los datos tiene un error de 26.80%, mientras que con un porcentaje de 20 % de los datos el BP tiene un error de 7.01% y el OMP un error de 3.7%. Esta señal también se analizó para el 30%, 50% y 90% de datos de la señal original. Aunque el error del OMP no llegue a cero, la recuperación de la señal en comparación al LQ es mejor, más estable como se ve en la figura 7 y en comparación al BP es semejante; sin embargo, con respecto al análisis del rango de error respecto a la toma de datos OMP es el más eficiente.





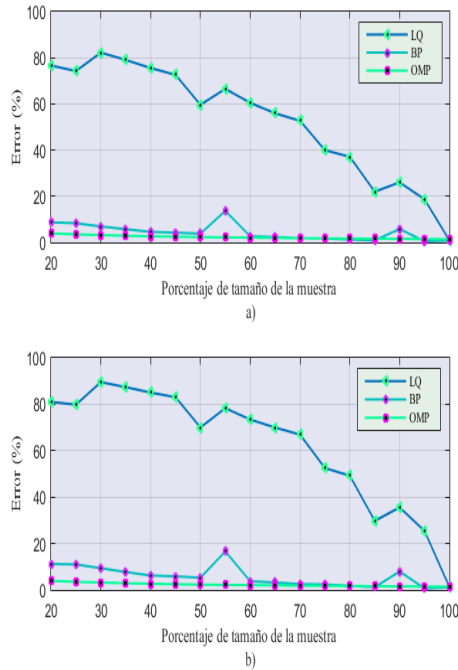
**Figura 7.** Reconstrucción de la segunda señal utilizando un diccionario unificado en los tres algoritmos, tomando de la señal original el 30% ,50% y 90% de datos respectivamente.

Al igual que en la primera señal la figura 8 presenta la reconstrucción de la señal armónica de voltaje  $xm_2$  en tres dimensiones, donde se puede apreciar la diferencia en la reconstrucción de cada algoritmo además de los coeficientes que se obtuvieron de la señal. Es evidente que el algoritmo menos eficiente es LQ y el más eficiente para este tipo de señal donde la distorsión armónica es considerable y tiene algunos picos dentro de esta, es el OMP.



**Figura 8.** Reconstrucción en vista 3D y coeficientes de la representación dispersa de la segunda señal utilizando un diccionario unificado en los tres algoritmos, tomando de la señal original el a) 30%, b) 50% y c) 90% de datos.

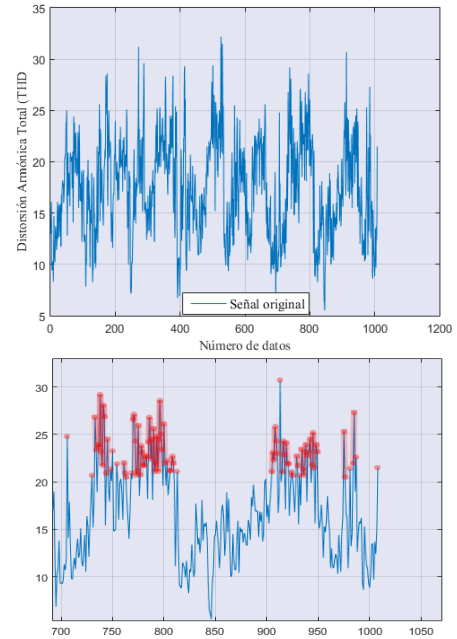
La figura 9 presenta los errores con el mismo intervalo que la primera señal, desde 20 % hasta 100% de los datos, aquí se observa que ya los errores tanto en el BP como en el OMP no tienden a cero, sino, ya hay una variación respecto del número de muestras, que van para el BP desde el 9.25% de error para el 20 por ciento de los datos hasta llegar a cero con el 100 por ciento de los datos, mientras que para el LQ va desde 88.66% hasta llegar a cero con el 100 por ciento de datos. Para el OMP el error va desde el 3.9% para el 20 por ciento de los datos hasta 1.41% para el 100 por ciento de datos, entonces podemos apreciar que en el OMP el error no llega a cero, sin embargo, por el rango de error que maneja a lo largo de todos los porcentajes de la muestra el OMP tiende a los errores más bajos, como se puede observar en la gráfica.



**Figura 9.** Error de reconstrucción de la segunda señal, con intervalo en pasos de 5 del 20% a 100% de la toma de datos. a) Error utilizando la norma  $\ell_1$ . b) Error utilizando la norma  $\ell_2$ .

La figura 10 corresponde a la última señal de estudio  $xm_3$ , que como se explicó antes pertenece al THD de corriente de un transformador, por esta

razón es importante recalcar que la distorsión armónica de esta señal es superior a la de las otras dos, con picos frecuentes a lo largo de toda la señal como se puede observar en la gráfica.

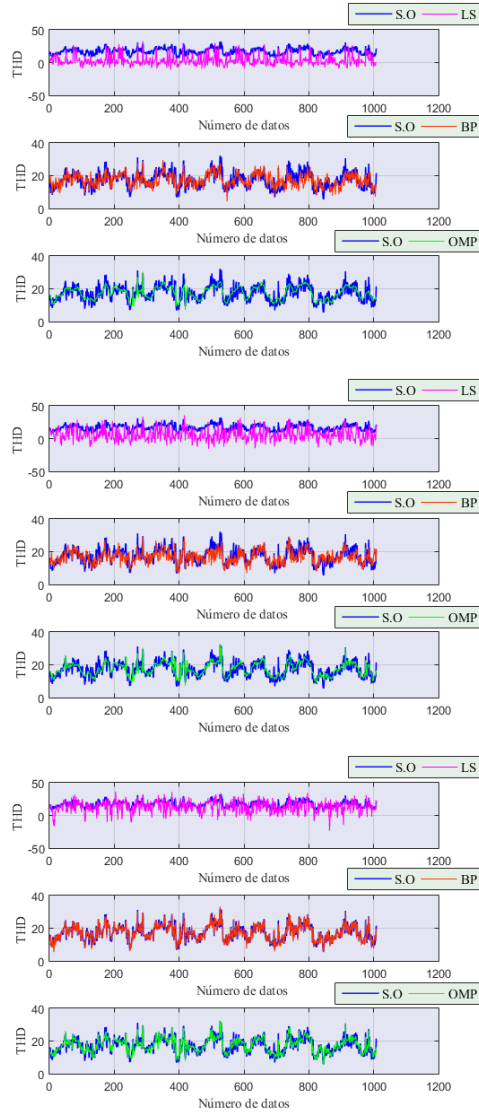


**Figura 10.** Señal armónica correspondiente a la medición de THD de la onda de corriente de un transformador.

La reconstrucción de  $xm_3$  se observa en la figura 11 (los picos de la distorsión se muestran en color rojo), la toma de muestra es igual que en las dos anteriores, 30%, 50% y 90% de datos de la señal original. El comportamiento de los algoritmos en la reconstrucción para  $xm_3$  es bastante distinto, como ya se expuso anteriormente señal está llena de picos y no tiene una forma de onda bien definida, por lo tanto, el nivel de dificultad aumenta. En las dos señales anteriores el método más eficiente había sido el OMP aunque en la segunda los errores no llegan a cero, aún mantenía una concordancia respecto al número de muestras tomadas si hacemos una comparación de toda la curva de error. Para la segunda señal ya se evidenció que el error del OMP cuando existen demasiados picos comienza a ser notorio, en otras palabras, cuando existen demasiados picos en la señal el

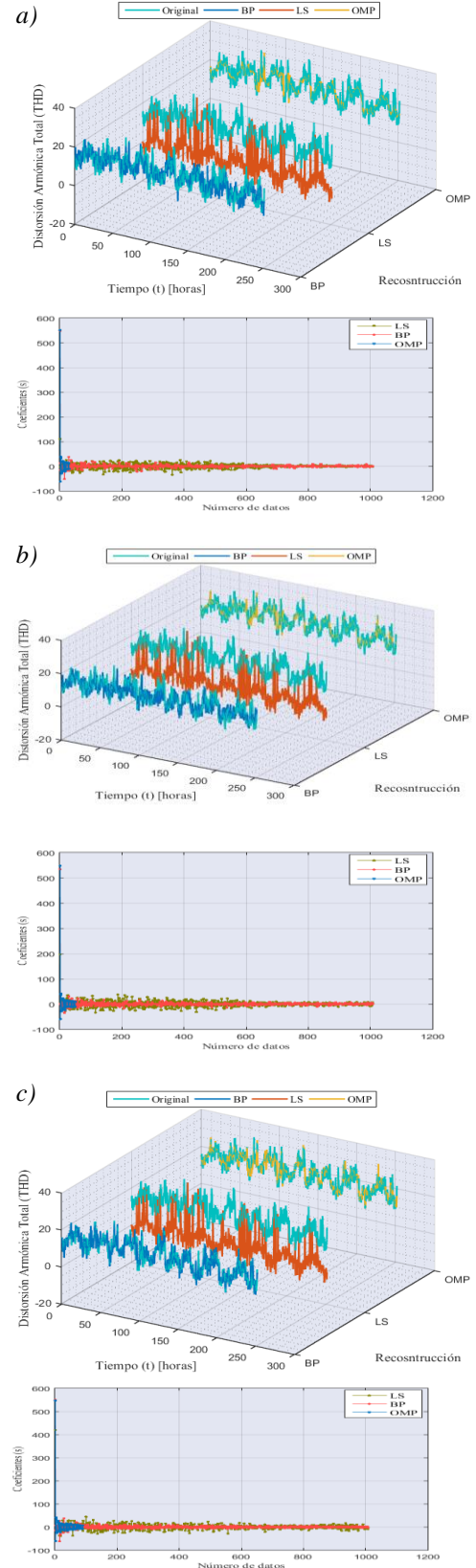


OMP empieza a bajar su eficiencia; por consecuente al probar con  $xm_3$  se puede evidenciar que el comportamiento se repite, pero esta vez es aún más notorio.



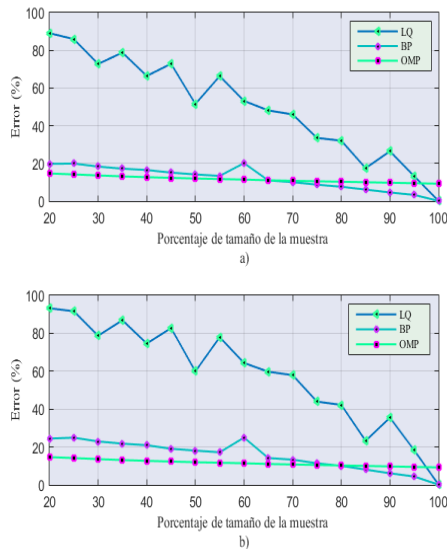
**Figura 11.** Reconstrucción de la tercera señal utilizando un diccionario unificado en los tres algoritmos, tomando de la señal original el 30% ,50% y 90% de datos respectivamente.

En la figura 12 se observa en 3 dimensiones la recuperación de la señal. El error para el 30 por ciento de los dados es 61.56%, 17.75%, 13.61%; para el 50 por ciento de los dados es 60.51%, 13.97%, 11.98%; para el 90 por ciento de los dados es 17.90%, 3.17%, 9.48% esto en los algoritmos LQ, BP, OMP respectivamente.



**Figura 12.** Reconstrucción en vista 3D y coeficientes de la representación dispersa de la tercera señal utilizando un diccionario unificado en los tres algoritmos, tomando de la señal original el a)30%, b) 50% y c) 90% de datos.

Los errores en la reconstrucción para la señal  $xm_3$  se pueden apreciar en la figura 13. El rango de análisis es el mismo, del 20% al 100% de toma de los datos, pero para esta señal es mucho claro cómo cambia la táctica de los algoritmos y la variación del error, teniendo como resultados, para el LQ un error desde 77.67% hasta 0.24 % notándose una clara mejora en este algoritmo; para el BP el error va desde 21.09% hasta 0.24% y en el OMP desde 17.67% hasta 9.26%. Todo se ve reflejado en la figura 13. Por tanto, para esta señal es perceptible, tanto en la gráfica como en los valores de porcentajes que el OMP no es el método más eficiente en la reconstrucción sino el BP, pues, aunque para esta señal el error no llegue al cero absoluto en ninguno de los tres métodos, el método cuyo error medible es más coherente es el BP.



**Figura 13.** Error de reconstrucción de la tercera señal, con intervalo en pasos de 5 del 20% a 100% de la toma de datos. a) Error utilizando la norma  $\ell_1$ . b) Error utilizando la norma  $\ell_2$ .

A continuación en la tabla 3 se muestra un resumen con los errores bajo la norma  $\ell_1$  en el intervalo para intervalos representativos del 30%, 50%, 90% y 100% para las tres señales con los diferentes algoritmos.

	$P$ [%]	$LQ$	$BP$	$OMP$
$xm_1$	30	85,987	0,021	0,003
	50	73,639	0,009	0,000
	90	32,980	0,0714	0,000
	100	0,000	0,000	0,000
$xm_2$	30	82,181	7,013	3,193
	50	67,616	4,294	2,303
	90	26,802	0,642	1,545
	100	0,000	0,000	1,415
$xm_3$	30	61,568	17,753	13,620
	50	60,511	13,972	11,990
	90	27,353	5,078	9,760
	100	0,244	0,244	9,262

**Tabla 3.** Resumen de los errores obtenidos en la reconstrucción de las tres señales mediante LQ, BP, OMP.

## 5. Conclusiones

El sensado comprimido (SC) es una técnica que ayuda a la recuperación de señales de manera eficiente respecto del costo computacional y tiempo; que permite representar señales mediante un número reducido de medidas, y a su vez, ofrece herramientas capaces de reconstruir las señales originales con muy poca pérdida de información.

La simulación implementada en este trabajo bajo SC permite el análisis de tres distintos algoritmos en la reconstrucción de señales armónicas, donde los resultados evidencian que el comportamiento de los algoritmos está directamente relacionados al porcentaje de mediciones que se tenga de la señal original y al nivel de THD de esta. Así mismo, tiene dependencia directa del diccionario que se seleccione para hacer la reconstrucción.

La simulación también permite calcular el error en la reconstrucción de cada señal; concluyente de estos errores se tiene que el algoritmo menos eficiente para la recuperación de señales cuyo nivel de THD es bajo es el LQ, mientras que, el BP y OMP tienen una eficiencia

mucho mayor, siendo este último el mejor reconstruye con un porcentaje de mediciones muy reducido. Todos los errores llegan a cero cuando se utiliza la totalidad de los datos de la señal original. Sin embargo, cuando se utilizan señales con un grado mayor de THD, el OMP ya no es tan eficaz, como es el caso de la señal armónica de la onda de voltaje. Sus valores de error en la reconstrucción, aunque no son mayores ya empiezan a reflejarse en un rango menor a 5% y a pesar de que el error no llegue a cero como con LQ Y BP, cuando el número de mediciones tomadas de la señal original es bajo, OMP sigue superando en la recuperación de la señal al LQ y BP con un error menor. No obstante, cuando las señales son irregulares con picos a lo largo de su forma de onda, es decir, con un THD bastante alto como en la señal armónica de la onda de corriente, el error del OMP ya es considerable y comparable con el método BP, puesto que no sólo no llega a cero, sino que tiene un rango de entre el 7 y 10% de error aun con el 100 por ciento de datos de la señal original, mientras que los otros dos métodos si bien no llegan a cero tienden a un error menor al 1%. Por tanto, OMP es el más algoritmo más eficiente cuando el tamaño de la muestra es pequeño, pero para la reconstrucción de señales armónicas el algoritmo que más estable mantiene la reconstrucción aun cuando exista una cuantiosa distorsión de la señal es el Basic Pursuit,

Por otro lado, acogiendo el resultado de los errores, se tiene que, en promedio para señales armónicas se necesita mínimo un 30% de compresión, es decir, al menos se debe tener el 30 % de datos de la señal original para poder reconstruirla de manera semejante a la señal original pues a partir de este valor el rango de variación del error comienza a ser estable, demostrando así, que SC

es una teoría que requiere sólo una fracción de información recopilada y por tanto se puede imprimir en sistemas de medición inteligente disminuyendo la longitud de muestreo armónico y por ende la complejidad del procedimiento de datos.

## 6. Referencias

- [1] Y. Liu, X. Wang, and Y. Liu, "Asynchronous harmonic analysis based on out-of-sequence measurement for large-scale residential power network," in *Conference Record - IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, 2015, vol. 2015–July, pp. 1693–1698.
- [2] Y. Shen, H. Zhang, G. Liu, H. Liu, H. Wu, and W. Xia, "A Novel Method on Harmonics Detection Based on Compressive Sampling Matching Pursuit," *Proceeding 11th World Congr. Intell. Control Autom.*, pp. 5567–5572, Jun. 2014.
- [3] X. Guo, R. Zhang, M. Liu, S. Tan, and J. Pian, "Harmonic detection method based on compressed sensing theory in the application of APF," in *2017 29th Chinese Control And Decision Conference (CCDC)*, 2017, pp. 6124–6129.
- [4] D. Jung, H. H. Nguyen, and D. K. Y. Yau, "Tracking appliance usage information using harmonic signature sensing," in *2015 IEEE International Conference on Smart Grid Communications (SmartGridComm)*, 2015, pp. 459–465.
- [5] M. Bertocco, G. Frigo, C. Narduzzi, and F. Tramarin, "Resolution enhancement in harmonic analysis by compressive sensing," *2013 IEEE Int. Work. Appl. Meas. Power Syst.*, pp. 40–45, 2013.
- [6] E. Inga and J. Rodriguez, "Estrategias de Negocio Para Medición Inteligente Acoplando Energías Renovables," *Prim. Congr. Int. y Expo Científica*, vol. 1, pp. 281–291, 2013.
- [7] A. Rodolfo, Q. Tufiño, E. Josafat, and C. Zapata, "ARQUITECTURA Y GESTIÓN DE DATOS DE MEDICIÓN INTELIGENTE DE ENERGÍA ELÉCTRICA APLICADO EN SMART GRID," Universidad Politécnica Salesiana, 2015.



- [8] M. Bertocco, G. Frigo, C. Narduzzi, and F. Tramarin, "Resolution Enhancement by Compressive Sensing in Power Quality and Phasor Measurement," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 63, no. 10, pp. 2358–2367, Oct. 2014.
- [9] S. Yang, B. Zhu, C. Roberts, and L. Chen, "Feature-based solution to harmonics interference on track circuit in electrified heavy haul railway," in *2013 IEEE International Conference on Intelligent Rail Transportation Proceedings*, 2013, pp. 296–300.
- [10] G. Frigo, G. Giorgi, and C. Narduzzi, "Efficient detection for multifrequency dynamic phasor analysis," in *2016 IEEE International Workshop on Applied Measurements for Power Systems, AMPS 2016 - Proceedings*, 2016, no. 3.
- [11] E. Astaiza, S. Member, H. F. Bermúdez, S. Member, and W. Y. Campo, "Efficient Wideband Spectrum Sensing Based on Compressive Sensing and Multiband Signal Covariance," *IEEE Lat. Am. Trans.*, vol. 15, no. 3, pp. 393–399, Mar. 2017.
- [12] J. Haupt, W. U. Bajwa, M. Rabbat, and R. Nowak, "Compressed sensing for networked data: A different approach to decentralized compression," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 25, no. 2, pp. 92–101, 2008.
- [13] A. F. García, C. Gómez, T. Sánchez, A. D. Redondo, L. Betancur, and R. C. Hincapié, "Algoritmos de Radiolocalización basados en ToA, TDoA y AoA," *Ing. y Región*, vol. 14, no. 2, p. 9, Feb. 2016.
- [14] C. Chou, S. Member, and T. Wu, "Analysis of Peak and Statistical Spectrum of Random Nonreturn-to-Zero Digital Signals," pp. 1–12, 2017.
- [15] F. Gagnon and L. C. Trudeau, "Suppression of multiple power line harmonic interference for low frequency signals," *Electron. Lett.*, vol. 49, no. 2, pp. 114–116, Jan. 2013.
- [16] M. Bertocco, G. Frigo, C. Narduzzi, C. Muscas, and P. A. Pegoraro, "Compressive Sensing of a Taylor-Fourier Multifrequency Model for Synchrophasor Estimation," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 64, no. 12, pp. 3274–3283, Dec. 2015.
- [17] L. A. Comerford, M. Beer, and I. A. Kougiumtzoglou, "Compressive sensing based power spectrum estimation from incomplete records by utilizing an adaptive basis," in *IEEE SSCI 2014 - 2014 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence - CIES 2014: 2014 IEEE Symposium on Computational Intelligence for Engineering Solutions, Proceedings*, 2015, pp. 117–124.
- [18] G. A. Magallán, C. H. De Angelo, and G. O. García, "Eliminación de Interferencia Armónica para la Detección de Fallas en Motores Eléctricos," *Rev. Iberoam. Automática e Informática Ind. RIAI*, vol. 6, no. 2, pp. 89–97, Apr. 2009.
- [19] Y. C. Eldar and G. Kutyniok, *Compressed sensing: theory and applications*, 9th ed. New York: Press, Cambridge University, 2012.
- [20] E. Astaiza Hoyos, P. E. Jojoa Gómez, and H. F. Bermúdez Orozco, "Compressive sensing: A methodological approach to an efficient signal processing," *Dyna*, vol. 82, no. 192, pp. 203–210, 2015.
- [21] R. Baraniuk, "Compressive Sensing [Lecture Notes]," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 24, no. 4, pp. 118–121, Jul. 2007.
- [22] L. Polo, A. Patricia, R. Coral, R. Humberto, Q. Sepúlveda, and J. Armando, "Recuperación de señales dispersas utilizando orthogonal matching pursuit (OMP)," *Ing. e Investig.*, vol. 29, pp. 112–118, 2009.
- [23] G. Pope, "Compressive Sensing: A Summary of Reconstruction Algorithms," *Matrix*, no. August 2008, 2009.
- [24] M. F. Duarte, S. Sarvotham, D. Baron, M. B. Wakin, and R. G. Baraniuk, "Distributed Compressed Sensing of Jointly Sparse Signals," in *Conference Record of the Thirty-Ninth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, 2005.*, 2005, pp. 1537–1541.
- [25] H. Monajemi, S. Jafarpour, M. Gavish, and D. L. Donoho, "Deterministic matrices matching the compressed sensing phase transitions of Gaussian random matrices," *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, vol. 110, no. 4, pp. 1181–6, 2013.
- [26] J. Bourgain, S. Dilworth, K. Ford, S. Konyagin, and D. Kutzarova, "Explicit constructions of RIP matrices and related problems," *Duke Math. J.*, vol. 159, no. 1, pp. 145–185,

- Jul. 2011.
- [27] M. Bertocco, G. Frigo, G. Giorgi, and C. Narduzzi, "Frequency tracking for efficient phasor measurement based on a CSTFM model," in *2015 IEEE International Workshop on Applied Measurements for Power Systems, AMPS 2015 - Proceedings*, 2015.
  - [28] M. Abreu, L. Villas, and S. Comprido, "Algoritmos de Sensado Comprido para la 5G de las Comunicaciones," Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, 2016.
  - [29] I. F. Akyildiz and Xudong Wang, "A survey on wireless mesh networks," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 43, no. 9, pp. S23–S30, Sep. 2005.
  - [30] A. Lavrenko, R. S. Thomä, and A. Bollig, "Compressive energy detection for blind coarse wideband sensing: Comparative performance study," *Proc. Int. Symp. Wirel. Commun. Syst.*, vol. 2016–April, no. 1, pp. 491–495, 2015.
  - [31] H. Zhu and G. B. Giannakis, "Sparse overcomplete representations for efficient identification of power line outages," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 27, no. 4, pp. 2215–2224, 2012.
  - [32] J. Marin, L. Betancur, and H. Arguello, "Compression Ratio Design in Compressive Spectral Imaging," *Data Compression Conf. Proc.*, p. 619, 2016.
  - [33] L. Stankovic, S. Stankovic, I. Orovic, and M. G. Amin, "Robust Time-Frequency Analysis Based on the L-Estimation and Compressive Sensing," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 20, no. 5, pp. 499–502, May 2013.
  - [34] S. Q. Ali, S. D. Maqbool, T. P. I. Ahamed, and N. H. Malik, "Pursuit Algorithm for optimized load scheduling," in *2012 IEEE International Power Engineering and Optimization Conference*, 2012, no. June, pp. 193–198.
  - [35] R. A. DeVore, "Deterministic constructions of compressed sensing matrices," *J. Complex.*, vol. 23, no. 4–6, pp. 918–925, Aug. 2007.
  - [36] E. Astaiza, H. F. Bermudez, and W. Y. Campo, "Efficient Wideband Spectrum sensing Based on Compressive Sensing and Multiband Signal Covariance," *IEEE Lat. Am. Trans.*, vol. 15, no. 3, pp. 393–399, Mar. 2017.
  - [37] R. A. DeVore, "Deterministic constructions of compressed sensing matrices," *J. Complex.*, vol. 23, no. 4–6, pp. 918–925, Aug. 2007.
  - [38] B. Zhang, X. Chen, Y. Fan, and G. Liu, "Design of a ultra wideband remote sensing system based on Sub-Harmonic mixer," *IEEE Antennas Propag. Soc. AP-S Int. Symp.*, vol. 2015–Octob, pp. 524–525, 2015.
  - [39] C. B. Top, A. K. Tafreshi, and N. G. Gençer, "Microwave Sensing of Acoustically Induced Local Harmonic Motion: Experimental and Simulation Studies on Breast Tumor Detection," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 64, no. 11, pp. 3974–3986, 2016.
  - [40] A. F. Martone, K. I. Ranney, K. D. Sherbondy, K. A. Gallagher, G. J. Mazzaro, and R. M. Narayanan, "An overview of spectrum sensing for harmonic radar," in *2016 International Symposium on Fundamentals of Electrical Engineering (ISFEE)*, 2016, pp. 1–5.
  - [41] N. Kim and J. M. Rabaey, "Spectrum Sensing with Harmonic Rejection Mixers," vol. 2, pp. 303–306, 2015.
  - [42] L. Pinter, "Statistical analysis of the electric vehicle chargers' impacts on the low-voltage distribution system," *Proc. 18th Mediterr. Electrotech. Conf. Intell. Effic. Technol. Serv. Citizen, MELECON 2016*, no. April, pp. 18–20, 2016.
  - [43] Y. H. Hsiao and C. C. Chen, "Overatoms accumulation orthogonal matching pursuit reconstruction algorithm for fish recognition and identification," in *Proceedings - International Conference on Pattern Recognition*, 2017, pp. 1071–1076.
  - [44] P. Indyk, "Explicit constructions for compressed sensing of sparse signals," *Symp. Discret. Algorithms*, no. October 2005, pp. 30–33, 2008.
  - [45] J. A. Suárez, G. F. Di Mauro, and D. A. C. Agüero, "Análisis de la distorsión armónica y los efectos de atenuación y diversidad en áreas residenciales," vol. 3, no. 5, pp. 429–435, 2005.
  - [46] A. S. Mikel Zatarain, Jokin Munoa, Cristobal Villasante, "Estudio comparativo de los modelos matemáticos de chatter en fresado: monofrecuencia, multifrecuencia y simulación en el tiempo," *XV Congr. Máquinas-Herramienta y Tecnol. Fabr.*, vol. 5, pp. 179–192, 2004.

- [47] M. A. Davenport, P. T. Boufounos, M. B. Wakin, and R. G. Baraniuk, "Signal processing with compressive measurements," *IEEE J. Sel. Top. Signal Process.*, vol. 4, no. 2, pp. 445–460, 2010.
- [48] F. Medina Rojas, H. Arguello Fuentes, and C. Gómez Santamaía, "A quantitative and qualitative performance analysis of compressive spectral imagers," *Rev. Tecnura*, vol. 21, no. 52, pp. 53–67, 2017.
- [49] M. Marcu and C. Cernazanu, "Applications of smart metering and home appliances' power signatures," in *Conference Record - IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, 2014, pp. 331–335.
- [50] S. M. S. Alam, B. Natarajan, and A. Pahwa, "Distribution grid state estimation from compressed measurements," *IEEE Trans. Smart Grid*, vol. 5, no. 4, pp. 1631–1642, 2014.
- [51] J. Inga-ortega, E. Inga-ortega, C. Gómez, and R. Hincapié, "Electrical Load Curve Reconstruction required for Demand Response using Compressed Sensing Techniques," in *IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Conference - Latin America (ISGT Latin America)*, 2017.
- [52] M. Ibrahim, V. Ramireddy, A. Lavrenko, J. König, F. Römer, M. Landmann, M. Grossmann, G. Del Galdo, and R. S. Thomä, "Design and Analysis of Compressive Antenna Arrays for Direction of Arrival Estimation," *ArXiv e-prints*, vol. 138, pp. 1–14, 2016.
- [53] D. F. Galvis-Carreño, Y. H. Mejía-Melgarejo, and H. Arguello-Fuentes, "Efficient reconstruction of Raman spectroscopy imaging based on compressive sensing," *Dyna*, vol. 81, no. 188, pp. 116–124, 2014.
- [54] M. Lustig, D. Donoho, and J. M. Pauly, "Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging," *Magn. Reson. Med.*, vol. 58, no. 6, pp. 1182–1195, Dec. 2007.
- [55] K. L. Lopez, L. Galvis, and H. Arguello Fuentes, "Spatio-spectro-temporal coded aperture design for multiresolution compressive spectral video sensing," *2017 25th Eur. Signal Process. Conf.*, no. September, pp. 728–732, 2017.
- [56] A. Bollig, M. Arts, A. Lavrenko, and R. Mathar, "Compressive cyclostationary spectrum sensing with a constant false alarm rate," *arXiv*, no. 1, pp. 1–19, 2016.
- [57] D. Needell, "Topics in Compressed Sensing," *IEEE Signal Process. Mag.*, p. 162, May 2009.
- [58] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Métodos Matemáticos Para Ingenieros*, 5th ed. Mexico: McGraw-Hill Interamericana, 2015.
- [59] M. Harker and P. O'Leary, "Least squares surface reconstruction from measured gradient fields," in *2008 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2008, pp. 1–7.
- [60] G. Kemmer and S. Keller, "Nonlinear least-squares data fitting in Excel spreadsheets," *Nat. Protoc.*, vol. 5, no. 2, pp. 267–81, Feb. 2010.
- [61] J. A. Tropp and A. C. Gilbert, "Signal Recovery From Random Measurements Via Orthogonal Matching Pursuit," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 53, no. 12, pp. 4655–4666, Dec. 2007.
- [62] D. K. Mondal, "Studies of Different Direction of Arrival ( DOA ) Estimation Algorithm for Smart Antenna in Wireless Communication," *Int. J. Electron. Commun. Technol.*, vol. 4, no. 1, pp. 43–47, 2013.
- [63] J. Wang, J. Zhang, C. Chen, F. Tian, and L. Cui, "Basic pursuit of an adaptive impulse dictionary for bearing fault diagnosis," in *2014 International Conference on Mechatronics and Control (ICMC)*, 2014, vol. 51, no. 1, pp. 2425–2430.
- [64] N. B. Karahanoglu and H. Erdogan, "A\* orthogonal matching pursuit: Best-first search for compressed sensing signal recovery," *Digit. Signal Process. A Rev. J.*, vol. 22, no. 4, pp. 555–568, 2012.